CONCOURS 1995

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Epreuve de Mathématiques

**Instructions générales :**

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

# PROBLEME 1

*Les parties II et III sont indépendantes et utilisent les résultats établis à la partie I.*

**Notations**: une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $I$, dont la dérivée $f'$ est continue sur $I$.

## PARTIE I

1. On définit la fonction $\varphi$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par: $\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 0$.

   (a) i. Donner le développement limité de $\varphi$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.

   ii. En déduire que $\varphi$ est continue et dérivable en 0. Préciser $\varphi'(0)$.

   (b) Montrer que $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   (c) Soit la fonction $\psi$ définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par: $\psi(t) = \frac{t}{\sin t}$ si $t \neq 0$ et $\psi(0) = 1$.

   Montrer que $\psi$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Préciser $\psi'(0)$.

2. Soient $a$ et $b$ réels tels que $a < b$. Soit $g$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

   Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que:

$$(1) \qquad \int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt \quad \text{tend vers 0 lorsque } \lambda \text{ tend vers } +\infty$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^\times$. On définit $S_n$ sur $[0, \pi]$ par: $S_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)$.

   (a) i. Montrer, *sans récurrence*, que:

$$(2) \qquad \forall t \in \left]0, \pi\right[, \quad S_n(t) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$$

   ii. Calculer $S_n(0)$ et $S_n(\pi)$.

   (b) Calculer la valeur de l'intégrale $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt$.

## PARTIE II

1. (a) Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin(2n+1)t\,dt$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

   (b) En déduire la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

2. (a) i. Vérifier que la fonction $f$ définie par $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

   On note $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par: $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt.$

   ii. Comparer $F\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$et $I_n$.

   (b) i. Soit $x$ réel, $x \geqslant \dfrac{\pi}{2}$. Justifier l'existence de $n \in \mathbb{N}$ (dépendant de $x$) tel que: $(2n+1)\dfrac{\pi}{2} \leqslant x < (2n+3)\dfrac{\pi}{2}$.

   On note $\alpha(x) = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$.

   ii. Montrer que $\displaystyle\int_{\alpha(x)}^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

   (c) En déduire que $F(x)$ admet une limite $\ell$ si $x$ tend vers $+\infty$. Préciser $\ell$.

3. (a) Soient $x$ et $y$ réels, tels que $y > x > 0$. Montrer que: $\left|\displaystyle\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leqslant \dfrac{2}{x}$. (On effectuera une intégration par parties).

   (b) En déduire que: $\forall x > 0, \quad |\ell - F(x)| \leqslant \dfrac{2}{x}$.

## PARTIE III

1. (a) Déterminer deux réels $\alpha$ et $\beta$, indépendants de $n$, tels que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}.$$

   ($\alpha$ et $\beta$ sont désormais ainsi fixés).

   (b) En déduire que $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2) S_n\left(\frac{t}{2}\right)\,dt$ est un réel indépendant de $n$, que l'on précisera.

   (c) On définit la fonction $h$ sur $]0,\pi]$ par: $h(t) = \dfrac{(\alpha t + \beta t^2)}{\sin(\frac{t}{2})}$.

   Montrer que $h$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

2. On définit les suites $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $(n \geqslant 1)$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$ $(n \geqslant 0)$.

   (a) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et donner sa limite.

   (b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

## PROBLEME 2

### Notations:

$n$ est un entier naturel fixé, $n \geqslant 2$.

$\mathcal{F}$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

$E$ est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels.

$E_n$ est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $n$.

### PARTIE I

Si $f \in \mathcal{F}$, on note $\Delta(f)$ et $T(f)$ les fonctions réelles définies par:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x), \quad \text{et} \quad T(f)(x) = f(x+1)$$

On admettra (aisément!) que $\Delta$ et $T$ sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.

On note $\Delta^0 = T^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ (donc, si $f \in \mathcal{F}$, $\Delta^0(f) = T^0(f) = f$), et, si $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 1$,

$$\Delta^j = \Delta^{j-1} \circ \Delta = \Delta \circ \Delta^{j-1}, \quad T^j = T^{j-1} \circ T = T \circ T^{j-1}.$$

1. (a) i. Soit $P \in E$, non constant. $\Delta(P)$ est une fonction polynôme.
   Comparer les degrés de $\Delta(P)$ et de $P$.
   Calculer le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de celui de $P$.
   ii. Vérifier que $\Delta$ induit un endomorphisme de $E_n$, noté $\Delta_n$.

   (b) *
   i. Déterminer $\ker \Delta_n$.
   ii. En déduire le rang de $\Delta_n$. Déterminer $\dim \Delta_n$.

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions polynômes $N_k$ par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad N_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad N_k(x) = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

   (a) i. Pour $k \geqslant 1$, exprimer $\Delta(N_k)$ en fonction des polynômes $(N_j)_{j \geqslant 0}$.
   ii. Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^j(N_k)$, puis $\left(\Delta^j(N_k)\right)(0)$.

   (b) i. Montrer que la famille $(N_0, N_1, ..., N_n)$ est une base de $E_n$.
   ii. Soit $P \in E_n$. $P$ s'écrit $P = a_0 N_0 + a_1 N_1 + \cdots + a_n N_n$ où $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
   Exprimer les $a_j$ en fonction des $\left(\Delta^j(P)\right)(0)$.

3. (a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}$. Déterminer pour $x \in \mathbb{R}$, $\left(T^k(f)\right)(x)$.

   (b) Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{F}$.
   i. Expliciter $\Delta^j(f)$ en fonction des $T^k(f)$, $0 \leqslant k \leqslant j$. (On pourra remarquer que $\Delta = T - \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$).
   ii. En déduire que $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ ne dépend que des valeurs de $f$ aux points $0, 1, ..., j$: $f(0), f(1), ..., f(j)$.

### PARTIE II

On se donne une fonction $f$ de $\mathcal{F}$. On cherche les polynômes solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant:

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \deg P \leqslant n \\ \forall k \in \{0, 1, ..., n\}, \qquad P(k) = f(k) \end{cases}$$

On pose $N(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - j) = x(x-1)\cdots(x-n)$.

1. (a) Soit l'application linéaire $\Phi$: $\begin{array}{ccc} E_n & \rightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(0),..,P(n)) \end{array}$

   Montrer que $\Phi$ est un isomorphisme.

   (b) En déduire que le problème $(\mathcal{P})$ possède une nuique solution notée $P_f$.

2. (a) Pour $j \in \{0,1,...,n\}$, comparer $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ et $\left(\Delta^j(P_f)\right)(0)$.

   (b) En déduire l' expression de $P_f$ en fonction des $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ et des polynômes $N_j$.

3. Dans cette question, on suppose que $f$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

   On note $M_n = \sup\left\{\left|f^{(n+1)}(t)\right|, \quad t \in [0,n]\right\}$.

   (a) Soit $x \in [0,n]$, non entier. Montrer que: $\exists\, c \in ]0,n[ \quad / \quad f(x) - P_f(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}N(x)$.
   (On pourra poser $\varphi(t) = f(t) - P_f(t) - KN(t)$, où $K$ est tel que $\varphi(x) = 0$, et appliquer judicieusement le théorème de Rolle).

   (b) En déduire que: $\forall x \in [0,n], |f(x) - P_f(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}M_n$.
   (On pourra majorer $|N(x)|$ sur chaque intervalle $[j,j+1]$, où $j \in \{0,1,...,n-1\}$).