# Valeurs absolues de $\mathbb{Q}$.

Abdellah Bechata

www.mathematiques.fr.st

**Résumé**

Nous définissons et explicitons toutes les valeurs absolues de $\mathbb{Q}$. Dans cet article, $p$ désignera systématiquement un nombre premier.

**Définition 1**
*Soit $k$ un corps. On appelle valeur absolue sur $k$ toute application $||$ de $k$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que*

$$\forall x \in k,\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \tag{1}$$
$$\forall x,y \in k,\ |xy| = |x|\,|y| \tag{2}$$
$$\forall x,y \in k,\ |x+y| \leqslant |x| + |y| \tag{3}$$

*Un corps muni d'une valeur absolue s'appelle un corps valué.*

L'égalité (2) et (1) montre que $|1| = 1$ $(x = y = 1)$, $|-1| = 1$ $(x = y = -1)$ puis que $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$.

**Définition 2**
*Une valeur absolue constante $||$ est dit triviale ssi $|x| = 1 \quad \forall x \in k^{\times}$ et $|0| = 0$.*

Il est évident qu'une valeur absolue triviale est une valeur absolue !.

**Exemple 1 (valeur absolue archimédienne sur $\mathbb{Q}$)**
La valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$ est une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ !
On l'appelle valeur absolue archimédienne de $\mathbb{Q}$ et on la note désormais $||_{\infty}$.

**Exemple 2 (valeur absolue $p$-adique sur $\mathbb{Q}$)**
Soit $p$ un nombre premier. On considère la fonction $||_p$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{Q}^{\times},\ |x|_p = p^{-k} \text{ si } x = p^k \frac{a}{b} \text{ avec } (a,p) = (b,p) = 1 \text{ et } |0|_p = 0.$$

où $(a,b)$ désigne le pgcd de $a$ et de $b$.

**Lemme 1**
*L'application $x \mapsto |x|_p$ est une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ .Elle vérifie, en outre, l'inégalité (ultramétrique)*

$$\forall x,y \in \mathbb{Q},\ |x+y|_p \leqslant \max(|x|_p\,, |y|_p). \tag{4}$$

*Cette valeur absolue $||_p$ est appelée valeur absolue $p$-adique de $\mathbb{Q}$.*

**Preuve :**
Par définition de $||_p$, l'égalité (1) est satisfaite.
Si $x = p^k \dfrac{a}{b}$ et $y = p^{k'} \dfrac{c}{d}$ avec $(a,p) = (b,p) = (c,p) = (d,p) = 1$ alors $xy = p^{k+k'} \dfrac{ac}{bd}$ et $(ac,p) = (bd,p)$, ce qui nous donne

$$|xy|_p = p^{-(k+k')} = p^{-k} p^{-k'} = |x|_p\,|y|_p$$

et démontre l'égalité (2).
D'autre part, en supposant que $k \leqslant k'$ (sinon on échange $x$ et $y$), on a $|y|_p = \max_p(|x|_p\,, |y|_p)$ et

$$x + y = p^k(\frac{a}{b} + p^{k'-k}\frac{c}{d}) = p^k(\frac{ad + cbp^{k'-k}}{bd}).$$

Puisque $ad + cbp^{k'-k}$ est un entier, il existe deux entiers $r$ et $a'$ tels que $ad + cbp^{k'-k} = p^r a'$ avec $(a',p) = 1$ et $r \geqslant 0$. En outre, $p$ est premier à $b$ et $d$ donc $p$ est premier à $bd$, ce qui nous donne l'inégalité

$$|x + y|_p = p^{-(k+r)} \leqslant p^{-k} = \max(|x|_p\,, |y|_p) \leqslant |x|_p + |y|_p\,,$$

qui démontre les inégalités (3).et (4) ■

**Remarque 1**
Il est de notoriété publique que l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est un ensemble non borné pour la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ induit par la valeur absolue archimédienne $||_\infty$. Par contre, si $p$ désigne un nombre premier, tout entier $n$ s'écrit sous la forme $p^r m$ où $r$ est un entier positif et $m'$ un entier relatif premier à $p$ donc

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ |n|_p = p^{-r} \leqslant 1,$$

ce qui implique que l'ensemble $\mathbb{Z}$ est borné pour toute valeur absolue $p$-adique $||_p$.

**Définition 3**

- *On appelle corps valué, tout couple de la forme $(k, ||)$ où $k$ est un corps et $||$ est une valeur absolue sur $k$.*
- *On appelle distance induite sur $k$ par $||$, la distance $d_{||}$ sur $k$ définie par*

  $$\forall x,y \in k, d_{||}(x,y) = |x - y|\,.$$

  *(je laisse au lecteur le soin de vérifier qu'il s'agit bien d'une distance)*
- *On dit que deux valeurs absolues sur $k$, $||_1$ et $||_2$, sont équivalentes ssi leurs distances associées respectives induisent la même topologie sur $k$.*

Rappellons que deux distances $d_1$ et $d_2$ sur un espace métrique $X$ définissent la même topologie si les ouverts pour la distance $d_1$ sont les ouverts pour la distance $d_2$.

**Lemme 2**
*Soit $k$ un corps et $||_1\,, ||_2$ deux valeurs absolues sur $k$.*
*Les valeurs absolues $||_1$ et $||_2$sont équivalentes ssi pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $k$ $(|x_n|_1 \underset{n\to+\infty}{\to} 0) \Leftrightarrow (|x_n|_2 \underset{n\to+\infty}{\to} 0)$.*

**Preuve :**

- Supposons que les valeurs absolues $||_1$ et $||_2$sont équivalentes.
  Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $k$ convergeant vers 0 pour la distance $d_1$. Alors, pour tout ouvert $V$ de 0 (pour la distance $d_1$), il existe un rang $n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \in V$. Or tout ouvert pour $d_2$ est un ouvert de $d_1$, donc pour tout ouvert $V$ de 0 (pour la distance $d_2$), il existe un rang $n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \in V$ ce qui démontre que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 pour la distance $d_2$.
- Supposons que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $k$ $(|x_n|_1 \underset{n\to+\infty}{\to} 0) \Leftrightarrow (|x_n|_2 \underset{n\to+\infty}{\to} 0)$.
  Démontrer que les ouverts pour $d_1$ sont les ouverts pour $d_2$ revient à démontrer que les fermés pour $d_1$ sont les fermés de $d_2$ (le complémentaire d'un ouvert est un fermé et vice-versa). La caractérisation séquentielle des fermés montre que $F$ est fermé ssi pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $F$ convergeante vers $x$ dans $k$ pour la distance $d_1$ alors $x \in F$.
  Soit $F$ un fermé pour la distance $d_1$ et soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $F$ convergeante vers $x \in k$ pour la distance $d_2$. Alors $d_{||_2}(x_n,x) = |x_n - x|_2 \to 0 \Leftrightarrow |x_n - x|_1 = d_{||_1}(x_n,x) \to 0$. On en déduit que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $x$ dans $k$ pour la distance $d_1$ et, puisque $F$ est fermé pour la distance $d_1$, $x \in F$. L'ensemble $F$ est donc fermé pour la distance $d_2$. En échangeant les rôles de $d_1$ et $d_2$, on conclut.

■

**Théorème 1**
*Soient* $||_1$ *et* $||_2$ *deux valeurs absolues sur* $k$*, alors* $||_1$ *et* $||_2$ *, sont équivalentes ssi il existe un réel positif* $a$ *tel que*

$$\forall x \in k, \qquad |x|_1 = |x|_2^a$$

**Preuve :**
L'implication réciproque est évidente grâce au lemme 2.
Pour l'implication directe, soit $x$ un élément de $k$ tel que $|x|_1 < 1$.
La suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ($|x^n|_1 = |x|_1^n$) dans $(k,d_{||_1})$ donc elle converge vers 0 dans $(k,d_{||_2})$ c'est-à-dire $|x|_2^n = |x^n|_2 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ d'où $|x|_2 < 1$. En échangeant le rôle joué par les deux valeurs absolues, on obtient que

$$\forall x \in k, \quad (|x|_1 > 1) \Leftrightarrow (|x|_2 > 1)$$

ensuite en remplaçant $x$ par $\dfrac{1}{x}$ ($x \neq 0$), on obtient

$$\forall x \in k, \quad (|x|_1 > 1) \Leftrightarrow (|x|_2 > 1)$$

et par conséquent

$$\forall x \in k, \quad (|x|_1 = 1) \Leftrightarrow (|x|_2 = 1)$$

Ainsi si $||_1$ est la valeur absolue triviale, on en déduit que $||_2$ est également la valeur triviale.
Supposons $||_1$ ne soit pas triviale : il existe $x_0 \in k$ tel que $|x_0|_1 > 1$ (donc $|x_0|_2 > 1$) ce qui implique qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $|x_0|_1 = |x_0|_2^a$ ($a = \dfrac{\ln|x_0|_1}{\ln|x_0|_2} > 0$).Soit $x \in k$ tel que $|x|_1 > 1$. Considérons le réel $b$ pour lequel $|x|_1 = |x_0|_1^b$. Pour tout rationnel $\dfrac{p}{q} < b$, on a les équivalences suivantes :

$$|x|_1 < |x_0|_1^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow |x^q|_1 < |x_0^p|_1 \Leftrightarrow \left|\frac{x^q}{x_0^p}\right|_1 < 1 \Leftrightarrow |x^q|_2 < |x_0^p|_2 \Leftrightarrow |x|_2 < |x_0|_2^{\frac{p}{q}}.$$

En faisant tendre $\dfrac{p}{q}$ vers $b$ dans $\mathbb{R}$, on obtient que $|x|_2 \leqslant |x_0|_2^b$.
En appliquant le même raisonnement à un rationnel $\dfrac{p}{q} > b$ puis en passant à la limite, on obtient que $|x|_2 \geqslant |x_0|_2^b$ ce qui nous fournit l'égalité

$$|x|_2 = |x_0|_2^b = |x_0|_1^{\frac{b}{a}} = |x|_1^{\frac{1}{a}} \Rightarrow |x|_1 = |x|_2^a$$

valable pour tout élément $x$ de $k$ tel que $|x|_1 > 1$. En remplaçant $x$ par $\dfrac{1}{x}$ et en utilisant la multiplicativité des valeurs absolues, on en déduit que

$$\forall x \in k, \text{ tel que } |x|_1 \neq 1, \ |x|_1 = |x|_2^a.$$

Soit $x \in k$ tel que $|x|_1 = 1$. L'élément $\dfrac{x}{x_0}$ qui vérifie $\left|\dfrac{x}{x_0}\right|_1 = \dfrac{|x|_1}{|x_0|_1} = \dfrac{1}{|x_0|_1} < 1$ donc on a

$$\left|\frac{x}{x_0}\right|_1 = \left|\frac{x}{x_0}\right|_2^a \Leftrightarrow |x|_1 = |x|_2^a$$

(car $|x_0|_1 = |x_0|_2^a$), ce qui nous permet d'affirmer

$$\forall x \in k, \ |x|_1 = |x|_2^a.$$

■

**Corollaire 1**
*Deux valeurs absolues $||_p$ et $||_l$ sont équivalentes ssi $p = l$*

**Preuve :**
La réciproque est triviale. Pour l'implication directe, il suffit de considérer la suite $(p^n)_{n\geqslant 0}$. Elle converge vers 0 pour $||_p$ car $|p^n|_p = p^{-n} \to 0$ quand $n \to +\infty$) et si $p \neq l$, elle ne converge pas vers 0 pour $||_l$ car $|p^n|_l = 1 \nrightarrow 0$. ■

**Théorème 2 (Ostrowski)**
*Toute valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ est équivalente à la valeur absolue archimédienne $||_\infty$ ou à une certaine valeur absolue p-adique $||_p$..*

**Preuve :**
Soit $||$ une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ non triviale.

1. Cas où $\mathbb{Z}$ est un ensemble borné pour $||$.
   Pour tout $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, la suite $(n^k)_{k\geqslant 0}$ est bornée donc la suite $(\left|n^k\right| = |n|^k)_k$ l'est également, ce qui démontre que
   $$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |n| \leqslant 1. \tag{5}$$
   La valeur absolue $||$ n'est pas triviale. Il existe alors un nombre entier non nul $n'$ tel que $|n'| < 1$ (sinon pour tout entier non nul $n$, l'égalité $|n| = 1$ est vérifiée donc pour tout rationnel $\frac{a}{b}$, on a $\left|\frac{a}{b}\right| = 1$, ce qui contredit l'hypothèse). Pour ce nombre $n'$, il existe des nombres premiers $p_1$,..,$p_r$ deux à deux distincts et des entiers positifs $l_1$,..,$l_r$ tels que $n' = \pm p_1^{l_1}..p_r^{l_r}$ donc $|p_1|^{l_1}..|p_r|^{l_r} = |n'| < 1$. Chacun des facteurs de ce produit est inférieur à 1 et le produit est strictement plus petit que 1 donc il existe un nombre premier $p_i$ tel que $|p_i| < 1$. Désormais, nous noterons $p$ le nombre premier $p_i$.
   Le théorème de Bezout montre que pour tout nombre $n$ premier à $p$, il existe des entiers relatifs $a_k$ et $b_k$ tels que $a_k p^k + b_k n^k = 1$. Supposons que $|n| < 1$ alors
   $$\left|a_k p^k\right| = |a_k|\,|p|^k \underset{\text{cf. (5)}}{\leqslant} |p|^k \underset{k\to+\infty}{\to} 0 \text{ et } \left|b_k n^k\right| = |b_k|\,|n|^k \underset{\text{cf. (5)}}{\leqslant} |n|^k \underset{k\to+\infty}{\to} 0.$$
   On en déduit que
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ 1 = |1| = \left|a_k p^k + b_k n^k\right| \leqslant \left|a_k p^k\right| + \left|b_k n^k\right| \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$
   ce qui est absurde (on remarquera que dans l'inégalité précédente $||$ désigne notre valeur absolue et non la valeur absolue archimédienne qui est notée $||_\infty$). Ainsi pour tout nombre $n$ premier à $p$, on a $|n| = 1$. Tout nombre rationnel non nul $x$ s'écrit sous la forme $x = p^k \frac{a}{b}$ avec $(a,p) = (b,p) = 1$ donc
   $$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad |x| = |p|^k = p^{-ka} = \left|p^k\right|_p^a = |x|_p^a \text{ avec } a = -\frac{\ln|p|}{\ln p} > 0.$$
   Ainsi si $\mathbb{Z}$ est un ensemble borné pour $||$, alors $||$ est équivalente à une certaine valeur p-adique.
2. Cas où $\mathbb{Z}$ est un ensemble non borné pour $||$.
   Soit $a$ un entier non nul positif tel que $|a| \neq 1$ (donc $a \notin \{0,1\} \Rightarrow a > 1$). Tout entier naturel $n$ s'écrit dans la base $a$ sous la forme $n = \sum_{m=0}^{r_n} q_m a^m$ avec $k_m \in \{0,..,a-1\}$,$q_{r_n} \neq 0$ et $r_n \leqslant \frac{\ln n}{\ln a}$ (car $a^{r_n} \leqslant n_{r_n} a^{r_n} \leqslant n$).
   Si l'on pose $M = \max_{s\in\{0,..,a-1\}}(|s|)$, il est immédiat que
   $$|n| \leqslant M \sum_{m=0}^{r_n} |a|^m .$$
   D'autre part, pour tout entier $k$, l'entier $n^k$ peut s'écrire $n^k = \sum_{m=0}^{r_{n^k}} q'_m a^m$ avec $r_{n^k} \leqslant \frac{\ln n^k}{\ln a} = k\frac{\ln n}{\ln a}$ ce qui nous fournit l'inégalité
   $$.\forall k \in \mathbb{N},\ |n|^k = \left|n^k\right| \leqslant M \sum_{k=0}^{r_{n^k}} |a|^k \tag{6}$$

Supposons qu'il existe un entier $a > 1$ tel que $|a| \leqslant 1$. alors l'inégalité (6) montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant 0, \quad |n|^k \leqslant M(r_{n^k}+1) \leqslant M(k\frac{\ln n}{\ln a}+1) \Rightarrow |n| \leqslant M^{\frac{1}{k}}(k\frac{\ln n}{\ln a}+1)^{\frac{1}{k}}.$$

Puisque $\frac{1}{k}\ln(k\frac{\ln n}{\ln a}+1) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k}\ln(k\frac{\ln n}{\ln a}) \underset{k\to+\infty}{\to} 0$, en faisant tendre $k$ vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |n| \leqslant 1$. L'ensemble $\mathbb{N}$ donc $\mathbb{Z}$ est bornée pour $||$ ce qui est absurde.
Ainsi pour tout entier naturel $a > 1$, on a $|a| > 1$. Nous reprenons l'inégalité 6 pour un entier $a > 1$ (donc $|a| > 1$) ce qui nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant 0, \quad |n| \leqslant M^{\frac{1}{k}}(\frac{|a|^{r_n+1}-1}{|a|-1})^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{M}{1-|a|}\right)^{\frac{1}{k}}(|a|^{k\frac{\ln n}{\ln a}+1}-1)^{\frac{1}{k}}$$

La suite $(|a|^{k\frac{\ln n}{\ln a}+1})_k$ tend vers $+\infty$ lorsque $k \to +\infty$ donc

$$\frac{1}{k}\ln(|a|^{k\frac{\ln n}{\ln a}+1}-1) = \frac{1}{k}[\underbrace{\ln(|a|^{k\frac{\ln n}{\ln a}+1})}_{\to+\infty}+\ln(1-\underbrace{|a|^{-(k\frac{\ln n}{\ln a}+1)}}_{\to 0})] \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{k}\ln\left(|a|^{k\frac{\ln n}{\ln a}+1}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k\frac{\ln n}{\ln a}}{k}\ln|a| \underset{k\to+\infty}{\to} \frac{\ln n}{\ln a}\ln|$$

En faisant tendre $k \to +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus

$$\forall a \in \mathbb{N} \text{ tel que } a > 1, \forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad |n| \leqslant |a|^{\frac{\ln n}{\ln a}} \Leftrightarrow \frac{\ln|n|}{\ln n} \leqslant \frac{\ln|a|}{\ln a}$$

Si l'on échange le rôle de $a$ et de $n$ dans l'inéquation précédente, on obtient que le rapport $\frac{\ln|n|}{\ln n}$ est constant sur les entiers strictements plus grand que 1. Désignons par $d$ cette constante : alors pour tout entier naturel $n > 1, \quad |n| = n^d$, la formule étant trivialement vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$. On peut étendre par multiplicativité cette formule aux entiers relatifs ($|-1| = 1$) puis à l'ensemble des rationnels.

On peut remarquer que le réel $d \in ]0,1]$ est positif ($d = \frac{\overbrace{\ln|a|}^{>0}}{\underbrace{\ln a}_{>0}}$ pour tout entier $a > 1$) et plus petit que 1 ($|a| = \left|\underbrace{1+1+..+1}_{a \text{ fois}}\right| \leqslant |a|_\infty |1| = a$).
Ainsi, si $\mathbb{Z}$ est un ensemble borné pour $||$, alors $||$ est équivalente à la valeur absolue archimédienne $||_\infty$.

■

**Définition 4**
*Une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ est dite*

- *archimédienne ssi elle est équivalente à la valeur absolue $||_\infty$*
- *non archimédienne ssi elle est équivalente à une certaine valeur absolue $p$-adique.*