Construction des nombres réels

Abdellah Bechata
www.mathematiques.fr.st

Table des matières

Résumé

Tant pour le profane que pour le mathématicien professionnel, les nombres sont un élément central dans les mathématiques. Parmi les différents types de nombres (entiers, rationnels, réels, complexes, p-adiques, etc.), les nombres réels possèdent une place particulière dans le monde mathématique. Tant l'intuition de leur existence est ancienne (depuis Pythagore et sa preuve de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$), tant est tardive leur construction rigoureuse (datant du $19^{ème}$ siècle par Cantor et Dedekind). L'enseignement utilise très tôt les nombres réels (à partir de la quatrième pour le théorème de Pythagore) ce qui fait que tout étudiant à l'impression que les nombres réels ainsi que leurs propriétés fondamentales sont tout à fait naturelles et évidentes. En outre, dès le début de l'enseignement supérieur, il utilisera régulièrement le fait que toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ est convergente dans $\mathbb{R}$, ce qui est le point fondamental de toute l'analyse. Malheureusement à l'heure actuelle, un étudiant peut très bien terminer ses études scientifiques dans le cycle supérieur sans jamais avoir vu une construction complète des nombres réels. On peut même affirmer qu'il s'agit du cas de l'immense majorité des étudiants en mathématiques (ce qui fut le cas de l'auteur) ! Même si l'étudiant se plonge dans la littérature mathématique, il lui sera régulièrement proposé la construction du complété d'un espace métrique dont la preuve présuppose la complétude de $\mathbb{R}$. Au mieux, il est mentionné que la construction des réels est analogue en complétant le corps $\mathbb{Q}$ mais la complétude de $\mathbb{R}$ n'est jamais exposé complètement et rigoureusement.

L'objectif de cet article est de donner une construction complète, détaillée et rigouse des nombres réels ainsi que leurs propriétés fondamentales. La constuction sera basée sur la belle idée de Cantor qui joue un rôle majeur dans l'analyse pour la construction de nombreux espaces complets. Pour que la preuve soit la plus complète possible, il serait nécessaire de construire les entiers relatifs puis les rationnels. Cette construction étant donnée dans de nombreux livres, je ne l'exposerais pas ici.

1 Non complétude de $\mathbb{Q}$

Nous allons exposé dans cette section la construction des réels selon la méthode élaborée par Cantor (par l'utilisation des suites de Cauchy). Il en existe deux autres :

- celle de Dedekind à l'aide des coupures. Une coupure étant une partition (A, B) de $\mathbb{Q}$ vérifiant

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad x < y.$$

- et une autre plus axiomatique basée sur le postulat archimédien (si $a > 0$ alors pour tout $b > 0$, il existe un entier n tel que $na > b$) et sur le théorème des segments emboités (dont le théorème sur les suites adjacentes n'est qu'une reformulation)

Nous supposons acquis la structure de corps ordonné sur $\mathbb{Q}$ ainsi que la notion de valeur absolue d'un rationnel.

Définition 1
Une suite u de rationnels est dite de Cauchy ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \forall n \geqslant N(\varepsilon), \quad \forall p \geqslant 0, \quad |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon.$$

Lemme 1
Il existe des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ qui ne sont pas convergentes.

Preuve :
Considérons la suite $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{n!}$ et démontrons qu'elle est de Cauchy.

$$\begin{aligned}
|u_{n+m} - u_n| &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{(-1)^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + ... + \frac{1}{(n+m)!} \quad \forall n \geqslant 1, \forall p \geqslant 0 \\
&= \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{(n+1)(n+2)..(n+m)}) \\
&\leqslant \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^m}) \leqslant \frac{2}{(n+1)!} \underset{n \to +\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

Nous venons de démontrer que la différence $u_{n+m} - u_n$ est majorée en valeur absolue (usuelle) par une suite ne dépendant que de n et qui tend vers 0 donc la suite u est bien de Cauchy.
Supposons qu'elle converge vers un rationnel $\frac{a}{b}$ avec $(a, b) = 1$.
Il est judicieux de remarquer que

$$u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{(2n+1)!} < 0$$

c'est-à-dire que la suite $(u_{2n})_{n \geqslant 0}$ est strictement décroissante donc $\forall n \geqslant 0, \quad \frac{a}{b} \leqslant u_{2n}$, que

$$u_{2n+3} - u_{2n+1} = \frac{-1}{(2n+3)!} + \frac{1}{(2n+2)!} > 0$$

c'est-à-dire la suite (u_{2n+1}) est strictement croissante et puisque $u_1 = 1 - 1 = 0$, on en déduit l'inégalité

$$\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant u_{2n+1} \leqslant \frac{a}{b}.$$

Des inégalités précédentes, on déduit l'encadrement suivant :

$$\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant u_{2n+1} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant u_{2n},$$

qui démontre en particulier que $\frac{a}{b}$ est positif donc on peut supposer dans la suite $a \geqslant 0$ et $b > 0$.
On multiplie l'inégalité précédente par $(2n)!$ et par b, ce qui nous donne

$$\forall n \geqslant 0, \quad b\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{(2n)!}{k!} \leqslant a(2n)! \leqslant b\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{(2n)!}{k!} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{b}{(2n+1)} \leqslant a(2n)! - b\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{(2n)!}{k!} \leqslant 0.$$

En particulier pour $2n + 1 > b \Leftrightarrow n > \frac{b-1}{2}$, on en déduit l'inégalité

$$\forall n > \frac{b-1}{2}, \quad -1 < a(2n)! - b\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{(2n)!}{k!} \leqslant 0.$$

Le nombre $a(2n)! - b\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{(2n)!}{k!}$ est toujours un nombre entier (car $\frac{(2n)!}{k!} = (2n)(2n-1)..(k+1)$). Or le seul entier strictement plus grand que -1 et plus petit que 0 est l'entier 0, d'où l'égalité

$$\forall n > \frac{b-1}{2}, \quad a(2n)! - b\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{(2n)!}{k!} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_{2n} = \frac{a}{b}$$

Ainsi la suite $(u_{2n})_n$ est stationnaire ce qui est absurde car elle est strictement croissante.
Conclusion : la suite u est de Cauchy mais elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ donc $(\mathbb{Q}, ||\ )$ n'est pas un espace métrique complet. ■

Le corps $\mathbb{Q}$ n'est donc pas complet pour la valeur absolue usuelle, ce qui est génant du point de vue de l'analyse. En effet, pour construire de nouveau objets mathématiques (nombres, fonctions, etc) il est utile d'utiliser la notion de limite de suite. Or la définition usuelle d'une limite présuppose que l'on connaisse la limite éventuelle ce qui s'avère dans la plupart des cas impossible. L'idée génial de Louis-Augustin Cauchy fut d'introduire la notion de suite de Cauchy afin de s'affranchir de l'utilisation d'une limite "explicite". En utilisant l'intuition que l'on avait à l'époque des réels (corps ordonné, théorème des segments emboités), il démontra que le corps des réels est complet c'est-à-dire qu'une suite réelle converge ssi elle est de Cauchy. Nous savons depuis longtemps (au moins intuitivement avec l'utilisation des décimaux et des calculatrices dans nos activités numériques depuis l'enfance) que les rationnels forment une partie dense de $\mathbb{R}$ c'est-à-dire tout réel est la limite (au sens de la valeur absolue archimédienne) d'une suite de rationnels, que la distance sur les rationnels est induite par la distance sur les réels. Il est dès lors évident que deux suites convergentes (ou de Cauchy, ce qui semble être la même chose pour les réels), vont "représenter" le même réel ssi elles possèdent la même limite, c'est-à-dire que leur différence tend vers 0. De cette analyse, Cantor en déduit une méthode rigoureuse de la construction des nombres réels en ne présuposant que l'existence des rationnels. Ces derniers se déduisent rigoureusement des entiers naturels, pour lequel nous devons poser le postulat de leur existence ainsi que de l'existence d'une addition et du principe de récurrence.

2 Définition du corps des réels

Considérons $\mathfrak{A}$ l'anneau des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ et $\mathfrak{J}$ l'ensemble des suites de $\mathbb{Q}$ qui convergent vers 0. Il est immédiat que $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}$ (toute suite convergente est de Cauchy) et que la somme de deux suites convergeant vers 0 converge vers 0. Si u est une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ (donc elle est bornée) et si v est une suite qui converge vers 0 alors la suite uv converge vers 0 ce qui démontre que $\mathfrak{J}$ est un idéal de $\mathfrak{A}$.
Nous souhaitons que deux suites de Cauchy u et v vont représenter le même nombre ssi $u - v \in \mathfrak{J}$ ce qui nous amène à considérer l'anneau quotient $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ (qui est le candidat potentiel pour représenter les réels).

Lemme 2
L'anneau quotient $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ est un corps.

Preuve :
Il s'agit de montrer que si $(x_n)_{n\geqslant 0} \neq 0 \bmod \mathfrak{J}$ (i.e. la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0) alors il existe une classe $(y_n)_{n\geqslant 0} \bmod \mathfrak{J} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ tel que $(x_n y_n)_n = (1)_n \bmod \mathfrak{J}$ (c'est-à-dire la suite $(x_n y_n - 1)$ converge vers 0). Considérons une suite de Cauchy $(x_n)_n$ de $\mathbb{Q}$ ne converge pas vers 0.
En prenant la contraposée de la convergence vers 0, on obtient qu'il existe $\alpha > 0$, tel que pour tout entier $N \geqslant 0$,il existe un entier $k(N) \geqslant N$ tel que $\left|x_{k(N)}\right| \geqslant \alpha$.
D'autre part, la suite x est de Cauchy et en écrivant la condition de Cauchy pour $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2}$, on obtient l'existence d'un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0, \quad \forall m \geqslant n_0, \quad |x_n - x_m| \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$.
Si l'on choisit $N = n_0$ alors nous disposons d'un entier $k_0 = k(n_0) \geqslant n_0$ qui satisfait aux inéquations suivantes

$$|x_{k_0}| \geqslant \alpha \text{ et } \forall m \geqslant n_0, \quad |x_{k_0} - x_m| \leqslant \frac{\alpha}{2}.$$

On en déduit que

$$\forall m \geqslant n_0, \quad \alpha \leqslant |x_{k_0}| \leqslant |x_{k_0} - x_m| + |x_m| \leqslant \frac{\alpha}{2} + |x_m|$$

c'est-à-dire

$$\forall m \geqslant n_0, \quad \frac{\alpha}{2} \leqslant |x_m|.$$

(" à partir d'un certain rang, tous les termes d'une suite de Cauchy sont très proches et si l'un deux est suffisamment éloigné de 0, alors tous les termes sont également suffisamment éloignés de 0 ")
En remarquant que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \forall m \geqslant n_0, \quad \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| = \frac{|x_n - x_m|}{|x_n|\,|x_m|} \leqslant \frac{4}{\alpha^2}\,|x_n - x_m|,$$

on en déduit que la suite $(\frac{1}{x_n})_{n\geqslant n_0}$ est de Cauchy donc la suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $y_n = 0$ si $n < n_0$ et $y_n = \frac{1}{x_n}$ si $n \geqslant n_0$ est également de Cauchy. Pour conclure il suffit de remarquer que $\forall n \geqslant n_0, \quad x_n y_n = 1$ donc la suite $(x_n y_n - 1)$ converge vers 0. ■

Définition 2 (nombres réels)
Le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ est le quotient $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ de l'anneau $\mathfrak{A}$ des suites de Cauchy par l'idéal maximal $\mathfrak{J}$ des suites de Cauchy convergeant vers 0.

A tout rationnel x, on associe la suite constante $(x)_n$ dont tous les termes sont égaux à x. L'application

$$j : \begin{cases} \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \\ x \to \widetilde{x} \bmod \mathfrak{J} = \{(x)_n + u, \quad u \in \mathfrak{J}\} \end{cases} \tag{1}$$

est injective. En effet, $j(x) = j(y)$ signifie que la suite $(x)_n - (y)_n = (x-y)_n$ tend vers 0 donc $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$. Cette application j permet d'injecter $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R} = \mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ (si un réel est représenté par un rationnel, ce rationnel est unique ce qui semble naturel)

Dans la suite, on identifiera tout rationnel x à son image $j(x) \in \mathbb{R}$

3 La relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$

Nous disposons sur $\mathbb{Q}$ de la relation d'ordre totale $\leqslant$ définie par $a \leqslant b$ ssi $b - a \geqslant 0$. Peut-on construire une relation d'ordre totale sur $\mathbb{R}$? Il est "évident" que cela est possible car on nous l'a toujours enseigné mais nous devons, dans cette article, la construire rigoureusement. Il s'agit de construire une relation d'ordre sur les classes d'équivalences de Cauchy de $\mathbb{Q}$ relativement à $\mathfrak{J}$ et, de ce point de vue, cela semble tout de suite moins évident.

Pour commencer, rappelons que la relation d'ordre totale $\leqslant$ est définie par $a \leqslant b$ ssi $b - a > 0$ ou $b - a = 0$.

Nous allons commencer par définir la relation d'ordre (partielle) $<$.

Définition 3 (Signe d'un nombre réel)
Soit $x = (x_n) \bmod \mathfrak{J}$ un nombre réel.

1. *On dit que x est strictement positif $(x > 0)$ ssi il existe un rationnel $a > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang n_0, on ait $x_n \geqslant a$.*
2. *On dit que x est strictement négatif $(x < 0)$ ssi il existe un rationnel $a < 0$ tel qu'à partir d'un certain rang n_0, on ait $x_n \leqslant a$.*
   De façon équivalente, $x < 0$ ssi $-x > 0$.

La définition précédente possède l'inconvénient majeure de définir la relation $x > 0$ par le choix du représentant $(x_n)_n$ du réel x ("de la suite de rationnels convergeant vers x "), qui est, rappelons le, une classe d'équivalence. Si l'on choisit un autre représentant $(y_n)_n$ de x, c'est-à-dire une autre suite $(y_n)_n$ telle que $(x_n - y_n) \to 0$, est-on assuré que la suite $(y_n)_n$ est minorée par un rationnel strictement positif ? Le lemme suivant répond à cette question.

Lemme 3
Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont deux suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ telles que $(x_n)_n \bmod \mathfrak{J} = (y_n)_n \bmod \mathfrak{J}$.
Alors $(x > 0) \Leftrightarrow (y > 0)$ et $(x < 0) \Leftrightarrow (y < 0)$.
En particulier, pour tout réel x la définition 3 est indépendante du choix représentant $(x_n)_n$ de x.

Preuve :
Soit $x = (x_n)_n \bmod \mathfrak{J}$ un réel strictement positif et $(y_n)_n \bmod \mathfrak{J}$ un autre représentant de x i.e. $x = (y_n)_n \bmod \mathfrak{J}$. Il existe un entier n_0 et un rationnel a tels que $\forall n \geqslant n_0, \quad x_n \geqslant a$. La suite $(x_n - y_n)_n$ converge vers 0 donc en écrivant la définition avec les ε et en fixant $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$, on obtient l'existence d'un entier n_1 tel que

$$\forall n \geqslant n_1, \quad x_n - y_n \leqslant \frac{a}{2} \Leftrightarrow y_n \geqslant x_n - \frac{a}{2}$$

donc

$$\forall n \geqslant \max(n_0, n_1), \quad y_n \geqslant x_n - \frac{a}{2} \geqslant a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

ce qui signifie que $y > 0$. Pour la réciproque, il suffit d'échanger les rôles de x et y.
Pour la seconde équivalence, il suffit de remarquer $(x < 0) \Leftrightarrow (-x > 0) \Leftrightarrow (-y > 0) \Leftrightarrow (y < 0)$. ■

Le lemme suivant montre que la relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$ est compatible à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Lemme 4
L'injection j de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (définie par (1)) est une application croissante d'ensembles ordonnés.

Preuve :
Si $x = y$, il est immédiat que $j(x) = j(y)$ et si $y > x$ alors $\forall n \geqslant 0, \quad (j(x-y))_n = a \in \mathbb{Q}_+^\times$ donc par définition de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, $j(x) > j(y)$. ■

L'intuition que nous possédons des réels nous montre que si une suite converge vers un réel x alors toute suite extraite converge vers x. Le lemme suivant est la formalisation de ce fait.

Lemme 5
Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ alors pour toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ de rationnels, la suite $(x_{\varphi(n)})_n$ est de Cauchy et $(x_n)_n = (x_{\varphi(n)})_n \bmod \mathfrak{J}$

Preuve :
La suite $(x_n)_n$ est de Cauchy donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_0, \forall m \geqslant n_0, \quad |x_n - x_m| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

L'application φ étant strictement croissante, on est assuré que $\forall n \geqslant 0, \quad \varphi(n) \geqslant n$, en particulier, si $n \geqslant n_0$ alors $\varphi(n) \geqslant n_0$.
Nous pouvons donc substituer n par $\varphi(n)$ et m par $\varphi(m)$ dans (2), on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_0, \forall m \geqslant n_0, \quad \left|x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(m)}\right| \leqslant \varepsilon$$

donc la suite $(x_{\varphi(n)})_n$ est une suite de Cauchy.
Si l'on subsitue seulement m par $\varphi(n)$ dans (2), on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_0, \quad \left|x_n - x_{\varphi(n)}\right| \leqslant \varepsilon$$

ce qui signifie que la suite $(x_n - x_{\varphi(n)})_n$ converge vers 0 donc $(x_n)_n = (x_{\varphi(n)})_n \bmod \mathfrak{J}$. ■

Corollaire 1
Soient x et y deux réels

1. *Si $x > y$ (resp. $x < y$), alors il existe un rationnel a strictement positif et deux suites de rationnels $(\widetilde{x}_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\widetilde{y_n})_{n\geqslant 0}$ satisfaisant aux conditions suivantes :*
   – $\forall n \geqslant 0, \quad \widetilde{x}_n \geqslant a + \widetilde{y}_n$ *(resp.* $\widetilde{x}_n \leqslant -a + \widetilde{y}_n$*)*
   – $x = (\widetilde{x}_n)_{n\geqslant 0} \bmod \mathfrak{J}$ *et* $y = (\widetilde{y}_n)_{n\geqslant 0} \bmod \mathfrak{J}$
2. *Si $x \geqslant y$ (resp. $x \leqslant y$), il existe deux suites de rationnels $(\widetilde{x}_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\widetilde{y_n})_{n\geqslant 0}$ satisfaisant aux conditions suivantes :*
   – $\forall n \geqslant 0, \quad \widetilde{x}_n \geqslant \widetilde{y}_n$ *(resp.* $\widetilde{x}_n \leqslant \widetilde{y}_n$*)*
   – $x = (\widetilde{x}_n)_{n\geqslant 0} \bmod \mathfrak{J}$ *et* $y = (\widetilde{y}_n)_{n\geqslant 0} \bmod \mathfrak{J}$
3. *Soient $x = (x_n)_{n\geqslant 0} \bmod \mathfrak{J}$ et $y = (y_n)_{n\geqslant 0} \bmod \mathfrak{J}$ sont deux réels tels qu'il existe un entier N pour lequel on a $\forall n \geqslant N, \quad x_n \leqslant y_n$.*
   Alors on a $x \leqslant y$.

Preuve :

1. nous ne traitons que le cas strictement positif, l'autre se traitant de la même façon.
   Si $x = (x_n)_{n\geqslant 0} \bmod \mathfrak{J}$ et $y = (y_n)_{n\geqslant 0} \bmod \mathfrak{J}$ alors il existe un entier N tel que $\forall n \geqslant N, \quad x_n \geqslant a + y_n$. La suite définie par $\forall n \geqslant 0, \quad \widetilde{x}_n = x_{n+N}$ (resp. $\widetilde{y}_n = y_{n+N}$) est une suite extraite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ (resp. $(y_n)_{n\geqslant 0}$) donc $x = (\widetilde{x}_n)_{n\geqslant 0} \bmod \mathfrak{J}$ ($y = (\widetilde{y}_n)_{n\geqslant 0} \bmod \mathfrak{J}$) et l'on a $\forall n \geqslant 0, \quad x_n \geqslant a + y_n$.

2. C'est une conséquence du 1) si l'on distingue les cas $x > y$, $x < y$ et $x = y$.
3. Procédons par l'absurde : supposons que $x > y$ alors il existe un rationnel $a \in \mathbb{Q}_+^\times$ et deux suites de Cauchy de rationnels $(\widetilde{x}_n)_{n\geqslant 0}$, $(\widetilde{y}_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $x = (\widetilde{x}_n)_{n\geqslant 0} \bmod \mathfrak{I}$, $y = (\widetilde{y}_n)_{n\geqslant 0} \bmod \mathfrak{I}$ et $\forall n \geqslant 0, \quad \widetilde{x}_n \geqslant a + \widetilde{y}_n$. Par définition, il existe deux suites de rationnels $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ convergentes vers 0 telles que $\forall n \geqslant 0, \quad \widetilde{x}_n = x_n + u_n$ et $\widetilde{y}_n = y_n + v_n$. On en déduit que
$$\forall n \geqslant N, \quad x_n + u_n \geqslant a + y_n + v_n \Leftrightarrow u_n - v_n \geqslant a + \underbrace{y_n - x_n}_{\geqslant 0} \geqslant a.$$
En passant à la limite dans la dernière inégalité, on obtient $0 \geqslant a$ ce qui est absurde.

■

Proposition 1
Soit x un réel, alors $x < 0$ ou $x = 0$ ou $x > 0$.
En particulier, tout réel est soit négatif ou positif (au sens large) et le seul réel positif et négatif est le réel nul.

Preuve :
Soit x un réel ni strictement positif, ni strictement négatif.
La contraposée de la définition $x > 0$ montre que si $x \not> 0$ alors
$$\forall a \in \mathbb{Q}_+, \forall N \geqslant 0, \quad \exists n(a, N) \in \mathbb{N} \text{ tel que } n(a, N) \geqslant N \text{ et } x_{n(a,N)} < a.$$
Pour $a = 1$ et $N = 0$, il existe un entier $\varphi(0) \geqslant 0$ tel que $x_{\varphi(0)} < 1$ et pour $a = \dfrac{1}{2}$ et $N = \varphi(0) + 1$ il existe un entier $\varphi(1) \geqslant \varphi(0) + 1 > \varphi(0)$ tel que $x_{\varphi(1)} < \dfrac{1}{2}$. On construit par récurrence, une suite strictement croissante d'entiers $\varphi(n)$ tel que
$$\forall n \geqslant 0, \quad x_{\varphi(n)} < \frac{1}{2^n} \tag{3}$$
(on considère $a = \dfrac{1}{2^n}$ et $N = \varphi(n-1) + 1$). La suite $(x_{\varphi(n)})_n$ est une suite extraite de $(x_n)_n$.
Le lemme 5 montre que $x = (y_n)_n \bmod \mathfrak{I}$ où $y_n = x_{\varphi(n)}$
Puisque $x = y$ n'est pas strictement négatif, on construit sur le même procédé une suite strictement croissante d'entiers $\psi(n)$ tel que
$$\forall n \geqslant 0, \quad y_{\psi(n)} > -\frac{1}{2^n} \Leftrightarrow x_{(\varphi\circ\psi)(n)} > -\frac{1}{2^n}. \tag{4}$$
La combinaison des inégalités (3) et (4) montre que
$$\forall n \geqslant 0, \quad -\frac{1}{2^n} < x_{(\varphi\circ\psi)(n)} < \frac{1}{2^{\psi(n)}} \leqslant \frac{1}{2^n}.$$
La suite $((\varphi \circ \psi)(n))_n$ est strictement croissante donc $x = (x_{(\varphi\circ\psi)(n)})_n \bmod \mathfrak{I}$ et la suite $(x_{(\varphi\circ\psi)(n)})_n$ converge vers 0 donc le réel x est nul.
Nous venons de démontrer que le seul réel non strictement positif, ni strictement négatif est le nombre réel nul.
Par contraposée, tout réel non nul est soit strictement positif, soit strictement négatif. ■

Définition 4
On note $\mathbb{R}_+^\times$ l'ensemble des réels strictement positifs et $\mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^\times \cup \{0\}$. Un élément de $\mathbb{R}_+$ est appelé réel positif. De même, $\mathbb{R}_-^\times$ désigne l'ensemble des réels strictement négatifs et $\mathbb{R}_- = \mathbb{R}_-^\times \cup \{0\}$. Un élément de $\mathbb{R}_-$ est appelé réel négatif.

Lemme 6 (Règle des signes)
1. *$(x \geqslant 0) \Leftrightarrow (-x \leqslant 0)$ et $(x \leqslant 0) \Leftrightarrow (-x \geqslant 0)$.*
2. *La somme de deux réels positifs est positif et la somme de deux réels négatifs est négatif.*
3. *Le produit de deux positifs ou de deux négatifs est positif et le produit de deux réels de signe opposé est négatif.*

4. *Le signe de tout nombre réel non nul x est le même que celui de son inverse $\dfrac{1}{x}$.*

Preuve :

1. Traitons pour comencer la première équivalence.
   Si $x = 0$ alors $-x = 0 \geqslant 0$. Supposons maintenant x est un réel strictement positif. Il existe un rationnel $a > 0$ et un entier N tels que $\forall n \geqslant N, \quad x_n \geqslant a$ donc $\forall n \geqslant N, \quad -x_n \leqslant -a$ et le rationnel $-a$ est strictement négatif ce qui signifie que $-x$ est strictement négatif.
   La réciproque se traite de façon similaire ainsi que la seconde équivalence.
2. Soient x et y deux réels positifs.
   - Si $x = 0$ (resp. $y = 0$) alors $x + y = y \geqslant 0$ (resp. $x + y = x \geqslant 0$)
   - Si $x = (x_n)_n \bmod \mathfrak{J} > 0$ et $y = (y_n)_n \bmod \mathfrak{J} > 0$. Il existe deux rationnels a et b strictement positif tels que $\forall n \geqslant 0, \quad x_n \geqslant a$ et $\forall n \geqslant 0, \quad y_n \geqslant b$ donc $\forall n \geqslant 0, \quad x_n + y_n \geqslant a + b$. En remarquant que $a + b$ est un rationnel strictement positif, on en déduit que $x + y > 0$ donc $x + y \geqslant 0$.

   Si x et y sont négatifs alors $x + y = -(-x + (-y))$. La partie 1 du lemme montre que $-x$ et $-y$ sont positifs donc $-x + (-y)$ est positif et son opposé est négatif.

   Je laisse la preuve au lecteur des parties 3 et 4 car elle est de même nature que la preuve du la seconde partie du lemme (pour la dernière, il suffit de remarquer que $x = (x_n)_n \bmod \mathfrak{J}$ alors $\dfrac{1}{x} = (\dfrac{1}{x_n})_{n \geqslant N} \bmod \mathfrak{J}$ pour N assez grand).

■

Proposition 2
La relation $\leqslant$ définie par $x \leqslant y$ ssi $(y - x > 0$ ou $y = x)$ définie une relation d'ordre totale de $\mathbb{R}$.

Preuve :

1. Deux réels x et y quelconques sont comparables.
   Soient $x = (x_n)_n \bmod \mathfrak{J}$ et $y = (y_n)_n \bmod \mathfrak{J}$ deux réels.
   Si $x = y$ alors il est immédiat que $x \leqslant y$.
   Si $x \neq y$ ce qui signifie $x - y \neq 0$ alors
   - soit $x - y < 0 \Leftrightarrow y - x > 0$ donc $y > x \Rightarrow x \leqslant y$
   - soit $x - y > 0$ donc $x > y \Rightarrow y \leqslant x$
2. Transitivité.
   Soient x, y et z trois réels tels que $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$. Les réels $y - x$ et $z - y$ sont donc positifs et, d'après le lemme 6, leur somme $(y - x) + (z - y) = z - x$ est un réel positif ce qui démontre que $z \geqslant x$.

■

Proposition 3 (règle de calcul sur les inégalités)
Soient x, y, z, t quatre réels.
- *Si $x \leqslant z$ alors $x + y \leqslant z + y$*
- *Si $x \leqslant z$ et $y \leqslant t$ alors $x + y \leqslant z + t$*
- *Si x et z sont non nuls et si $x \leqslant z$ alors $\dfrac{1}{z} \leqslant \dfrac{1}{x}$.*
- *Si $x \leqslant z$ alors $xy \leqslant zy$ si $y \geqslant 0$ et $xy \geqslant zy$ si $y \leqslant 0$.*

Preuve :
Cela résulte immédiatement du lemme 6 et des égalités suivantes :

$$(z + y) - (x + y) = z - x, \quad (z + t) - (x + y) = (z - x) + (t - y), \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{z - x}{zx}, \quad zy - xy = (z - x)y$$

■

Théorème 1
Pour tous réels x et y tels que $x < y$, il existe un rationnel a tel que $x < a < y$.

Preuve :
On peut écrire $x = (x_n)_{n\geqslant 0} \bmod \mathfrak{J}$ et $y = (y_n)_{n\geqslant 0} \bmod \mathfrak{J}$ tel qu'il existe un rationnel $b > 0$ tel que

$$\forall n \geqslant 0, \quad y_n \geqslant x_n + b. \tag{5}$$

Les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont de Cauchy donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \text{ tel que } \forall n \geqslant n_1, \forall m \geqslant n_1, \quad |x_n - x_m| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \text{ tel que } \forall n \geqslant n_1, \forall m \geqslant n_1, \quad x_n \leqslant x_m + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \text{ tel que } \forall n \geqslant n_2, \forall m \geqslant n_2, \quad |y_n - y_m| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \text{ tel que } \forall n \geqslant n_2, \forall m \geqslant n_2, \quad y_m - \varepsilon \leqslant y_n$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \max(n_1, n_2) \text{ tel que } \forall n \geqslant N, \forall m \geqslant N, \quad x_n \leqslant x_m + \varepsilon \text{ et } y_m - \varepsilon \leqslant y_n$$

Pour $\varepsilon = \dfrac{b}{4} > 0$, on obtient

$$\forall n \geqslant N, \quad x_n \leqslant x_N + \frac{b}{4} \text{ et } y_N - \frac{b}{4} \leqslant y_n \tag{6}$$

L'inégalité (5) montre que la différence $(y_N - \dfrac{b}{4}) - (x_N + \dfrac{b}{4})$ est strictement positive car

$$(y_N - \frac{b}{4}) - (x_N + \frac{b}{4}) = y_N - x_N - \frac{b}{2} \geqslant b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} > 0.$$

Le rationnel $a = \dfrac{x_N + y_N}{2} + \dfrac{b}{4}$ vérifie l'inégalité

$$x_N + \frac{b}{4} < a < y_N - \frac{b}{4}.$$

Cette dernière inégalité et l'inégalité (6) montre que l'on a

$$\forall n \geqslant N, \quad x_n \leqslant x_N + \frac{b}{4} < a < y_N - \frac{b}{4} \leqslant y_n$$

d'où

$$\forall n \geqslant N, \quad x_n - a \leqslant x_N + \frac{b}{4} - a \text{ et } y_N - \frac{b}{4} - a \leqslant y_n - a.$$

Le nombre rationnel $x_N + \dfrac{b}{4} - a$ est strictement négatif et le rationnel $y_N - \dfrac{b}{4} - a$ est strictement positif. Ainsi $x - a < 0$ et $y - a > 0$ ce qui démontre l'existence d'un rationnel a tel que

$$x < a < y.$$

■

Proposition 4 (Partie entière d'un réel)
Pour tout réel x, il existe un unique entier $n(x)$ tel que $n(x) \leqslant x < n(x) + 1$.
Cet unique entier $n(x)$ s'appelle partie entière de x et se note indifféremment $E(x)$ ou $[x]$.

Preuve :
Soit $x = (x_n)_n \bmod \mathfrak{J}$ un réel. La suite de rationnels $(x_n)_n$ est de Cauchy donc elle est bornée. Il existe un rationnel a tel que $\forall n \geqslant 0, \quad x_n \leqslant a$. Si $E(a)$ désigne la partie entière de a dans $\mathbb{Z}$ (nous avons déjà construit la partie entière de tout rationnel) alors $x < E(a) + 1$ (car $\forall n \geqslant 0, \quad x_n - (E(a)+1) \leqslant \underbrace{a - (E(a)+1)}_{<0})$). On en déduit que l'ensemble $H = \{n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x < n\}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{Z}$. Le théorème 1 montre qu'il existe un rationnel c tel $x - 1 < c < x$ donc tout élément n de H vérifie $E(c) \leqslant c < n$. L'ensemble non vide H de $\mathbb{Z}$ est minoré par l'entier relatif $E(c)$ donc H possède un plus petit $N(x) \in \mathbb{Z} \cap H$. Par définition de $N(x)$, $\quad x < N(x)$ et l'entier

$N(x)-1$ ne peut appartenir à H (sinon $x < N(x)-1$ et la définition de $N(x)$ implique que $N(x) \leqslant N(x)-1$) donc $x \geqslant N(x)-1$. Ainsi nous avons construit un entier $N(x)$ tel que $N(x)-1 \leqslant x < N(x)$. Soit N un autre entier vérifiant $N-1 \leqslant x < N$. La seconde inégalité montre que $N \geqslant N(x)$. Cet entier est unique puisque si $N-1 \leqslant x < N$, la seconde inégalité implique que $N \geqslant N(x)$. D'autre part, on a $N(x)-N-1 < 0$ (en soustrayant les inégalités satisfaitent par $N(x)$ et N) ce qui implique que $N(x)-N \leqslant 0$ donc $N(x) = N$. On conclut la preuve en remarquant que l'entier recherché est $n(x) = N(x)-1$. ■

Corollaire 2 (Principe archimédien)
Pour tous réels strictement positifs x et y, il existe un entier n tel que $nx > y$.

Preuve :
La proposition 4 montre que $\frac{y}{x} < E(\frac{y}{x})+1$ et, puisque $y > 0$, le lemme 3 montre que $y < \underbrace{(E(\frac{y}{x})+1)}_{\in\mathbb{Z}}x$. ■

4 Complétude de $\mathbb{R}$

Nous devons munir cet espace $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ d'une métrique et nous ne disposons que d'une métrique sur $\mathbb{Q}$ déduite de la valeur absolue usuelle. Intuitivement, si x est un réel, sa "valeur absolue" $|x|$ (qui n'existe pas encore) est un réel donc une suite de Cauchy dans notre reformulation. Remarquons que l'inégalité triangulaire

$$||x_{n+m}| - |x_n|| \leqslant |x_{n+m} - x_n| \tag{7}$$

montre que si la suite (x_n) est de Cauchy de $\mathbb{Q}$ alors la suite $(|x_n|)$ l'est aussi. D'autre part, si on se rappelle que notre réel x est limite de la suite de rationnels alors on a envie de définir sa valeur absolue $|x|$ comme la suite $(|x_n|)_n$ ("continuité de la valeur absolue").
On définit l'application $||_1$ de $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ dans $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ par

$$||_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{A}/\mathfrak{J} & \rightarrow & \mathfrak{A}/\mathfrak{J} \\ x \bmod \mathfrak{J} = \{x+u, \quad u \in \mathfrak{J}\} & \mapsto & (|x_n|)_n \bmod \mathfrak{J} \end{array} \right.$$

(à une classe d'une suite de Cauchy $(x_n)_n$, on associe la classe de la suite de Cauchy $(|x_n|)_n$. Soit $x \bmod \mathfrak{J}$ un élément de $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ (où x désigne une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$), on pose $|x \bmod \mathfrak{J}|_1 = (|x_n|)_n \bmod \mathfrak{J}$. Cette application est pour l'instant mal définie (on a fait un choix du représenter d'une classe d'équivalence et donc cette expression dépend peut-être du représentant et non de la classe). Soit y un autre représentant de $\widetilde{x}$, c'est-à-dire $\widetilde{x} = \widetilde{y} \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$ et l'inégalité $||x_n| - |y_n|| \leqslant |x_n - y_n|$ montre que

$$\lim_{n\to+\infty}(|x_n| - |y_n|) = 0 \Rightarrow (|x_n|)_n \bmod \mathfrak{J} = (|y_n|)_n \bmod \mathfrak{J} \Rightarrow |\widetilde{x}|_1 = |\widetilde{y}|_1$$

ce qui nous assure que l'application $||_1$ est bien définie.
Il est immédiat que si $x \in \mathbb{Q}$, on a $|j(x)|_1 = j(|x|)$. Par abus de notation, on notera $||$ au lieu de $||_1$.

Définition 5 (valeur absolue $||$ sur $\mathbb{R}$)
Soit $x = (x_n)_n \bmod \mathfrak{J}$ un réel. On appelle valeur absolue de x le réel $|x|$ défini par

$$|x| = (|x_n|)_n \bmod \mathfrak{J}.$$

Par abus, de notation

Lemme 7
La valeur absolue $||$ sur $\mathbb{R}$ vérifie la relation
- $|x| = \max(x, -x)$

ainsi que les relations suivantes valables $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$,
- $|x| \geqslant 0$ *et* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $|xy| = |x|\,|y|$
- $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

– $|x+y| = |x| + |y|$ *ssi* x *et* y *sont de même signe*
– $-y \leqslant x \leqslant y \Leftrightarrow |x| \leqslant y$ *si* $y \geqslant 0$. *En particulier,* $0 \leqslant x \leqslant y$ *alors* $|x| \leqslant y$.

Preuve :

– Si $x = 0$, la relation est évidente. Si $x > 0$, on peut choisir un représentant $(x_n)_{n\geqslant 0}$ tel $\forall n \geqslant 0, \quad x_n > 0$ donc $\forall n \geqslant 0, \quad |x_n| = x_n$ c'est-à-dire $|x| = x$. Par le même raisonnement, si $x < 0$, on obtient $|x| = -x$.
– Si $|x| = 0$ alors $\max(x, -x) = 0$ donc $x \leqslant 0$ et $-x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$ donc $x = 0$. La réciproque est évidente. Supposons que $x \neq 0$ donc $x < 0$ ou $x > 0$. La relation $|-x| = (|-x_n|)_n \bmod \mathfrak{J} =(|x_n|)_n \bmod \mathfrak{J} = |x|$montre que l'on peut supposer $x > 0$ i.e. il existe un rationnel $a > 0$ et un entier N tel que $\forall n \geqslant N, \quad x_n \geqslant a$ donc $\forall n \geqslant N, \quad |x_n| \geqslant a \Rightarrow |x| > 0$.
– $|xy| = (|x_n y_n|)_n \bmod \mathfrak{J} =(|x_n|\,|y_n|)_n \bmod \mathfrak{J} = [(|x_n|)_n \bmod \mathfrak{J}][(|y_n|)_n \bmod \mathfrak{J}]= |x|\,|y|$.
– On sait que $x \leqslant \max(x, -x)$ et $y \leqslant \max(y, -y)$ donc $x + y + \max(y, -y) = |x| + |y|$. De la même façon, on a $-x - y = (-x) + (-y) \leqslant \max(x, -x) + \max(y, -y) = |x| + |y|$. Les deux inégalités précédentes montrent que $|x + y| = \max(x + y, -x - y) \leqslant |x| + |y|$.
– La réciproque est laissée au lecteur. Pour l'implication directe, supposons que les deux réels soient non nuls de signe oposé. Dans ce cas, on peut supposer $x > 0$ et $y < 0$ ce qui nous donne $|x| + |y| = x - y$. D'autre part, $|x + y|$est égal à $x + y$ ou à $-x - y$ donc on a nécessairement $x - -y = x + y$ ce qui implique que $y = 0$ ou $x - y = -x - y$ donc $x = 0$. Dans tous les cas, on abouti à une contradiction donc x et y sont de même signe.
– $-y \leqslant x \leqslant y \Leftrightarrow (x \leqslant y$ et $-x \leqslant y) \Leftrightarrow |x| = \max(x, -x) \leqslant y$.

■

Définition 6
Une suite $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ *de réels converge vers* 0 *ssi* $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \exists N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N, \quad \left|x^{(n)}\right| < \varepsilon$.
On dit d'une suite $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ *de réels converge vers un réel* x *ssi la suite* $(x^{(n)} - x)_{n\geqslant 0}$ *converge vers* 0.

Rappelons que l'on identifie tout rationnel a à la classe, modulo $\mathfrak{J}$, de la suite constante égale à a (qui est donc de Cauchy)

Théorème 2
Tout réel est la limite d'une suite de rationnels (" $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ").

Preuve :
Soit x un réel et n un entier positif. Le réel $\dfrac{E(nx)}{n}$ est un rationnel ("suite rationnelle constante") qui vérifie

$$E(nx) - 1 \leqslant nx < E(nx) \Leftrightarrow \frac{E(nx)}{n} - \frac{1}{n} \leqslant x < \frac{E(nx)}{n} \Rightarrow 0 < \frac{E(nx)}{n} - x \leqslant \frac{1}{n} \Rightarrow \left|\frac{E(nx)}{n} - x\right| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Soit ε un réel strictement positif. Le théorème 1 montre l'existence d'un rationnel a tel que $0 < a < \varepsilon$. La suite de rationnels $(\dfrac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 dans $\mathbb{Q}$ donc il existe un rang N tel que $\forall n \geqslant N, \quad \dfrac{1}{n} \leqslant a$. On en déduit que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \exists N \geqslant 0, \quad \forall n \geqslant N, \quad \left|\frac{E(nx)}{n} - x\right| \leqslant a < \varepsilon$$

ce qui signifie que la suite de rationnels $(\dfrac{E(nx)}{n})_{n\geqslant 1}$ converge vers le réel x. ■

Définition 7
On dit qu'une suite de réels $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ *est de Cauchy ssi*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \exists N \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \forall n \geqslant N, \quad \forall m \geqslant N, \quad \left|x^{(n)} - x^{(m)}\right| < \varepsilon.$$

Je laisse le soin au lecteur de vérifier que toute suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$

Définition 8
Soit $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ une suite de réels.
On appelle suite extraite de $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ toute suite de réels de la forme $(x^{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
On dit qu'un réel L est une valeur d'adhérence d'une suite de réels $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ si et seulement si L est la limite d'une certaine suite extraite de $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$.

Lemme 8
Toute suite de Cauchy de réels $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ possède une suite extraite $(x^{(\varphi(n))})_{n\geqslant 0}$ telle que

$$\forall n \geqslant 0, \qquad \left|x^{(\varphi(n+1))} - x^{(\varphi(n))}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Preuve :
La suite $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy donc

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \exists N \text{ tel que } \forall m \geqslant N, \quad \forall p \geqslant N, \quad \left|x^{(m)} - x^{(p)}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2^0}$, il existe un entier $\varphi(0)$ tel que

$$\forall m \geqslant \varphi(0), \quad \forall p \geqslant \varphi(0), \quad \left|x^{(m)} - x^{(p)}\right| \leqslant \varepsilon.$$

En particulier,

$$\forall m \geqslant \varphi(0), \quad \left|x^{(m)} - x^{(\varphi(0))}\right| \leqslant \frac{1}{2^0}. \tag{8}$$

Il est aisé de vérifier que la suite $(x^{(m)} - x^{(\varphi(0))})_{m\geqslant\varphi(0)+1}$ est de Cauchy et, en écrivant la condition de Cauchy pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2^1}$, on obtient que l'existence d'un entier $\varphi(1) \geqslant \varphi(0)+1 > \varphi(0)$ tel que

$$\forall m \geqslant \varphi(1), \quad \forall p \geqslant \varphi(1), \quad \left|x^{(m)} - x^{(p)}\right| \leqslant \frac{1}{2^1}.$$

En particulier,

$$\forall m \geqslant \varphi(1), \quad \left|x^{(m)} - x^{(\varphi(1))}\right| \leqslant \frac{1}{2^1}. \tag{9}$$

Par définition, $\varphi(1) > \varphi(0)$ donc nous pouvons appliquer l'inégalité (8) à $m = \varphi(1)$ ce qui nous donne

$$\left|x^{(\varphi(1))} - x^{(\varphi(0))}\right| \leqslant \frac{1}{2^0}.$$

On procède ensuite par récurrence de la façon suivante. Supposons avoir construit des entiers

$$\varphi(0) > \varphi(1) > ... > \varphi(n-1) \text{ tels que } \forall k \in \{0,..,n-2\}, \quad \left|x^{(\varphi(k+1))} - x^{(\varphi(k))}\right| \leqslant \frac{1}{2^k}$$

$$\text{et } \forall m \geqslant \varphi(n-1), \quad \left|x^{(m)} - x^{(\varphi(n-1))}\right| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{10}$$

La suite $(x^{(m)} - x^{(\varphi(n-1))})_{m\geqslant\varphi(n-1)+1}$ est de Cauchy et, en écrivant la condition de Cauchy pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2^n}$, on obtient que l'existence d'un entier $\varphi(n) \geqslant \varphi(n-1)+1 > \varphi(n-1)$ tel que

$$\forall m \geqslant \varphi(n), \quad \forall p \geqslant \varphi(n), \quad \left|x^{(m)} - x^{(p)}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

En particulier, $\forall m \geqslant \varphi(n), \quad \left|x^{(m))} - x^{(\varphi(n))}\right| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et par définition, $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ donc nous pouvons appliquer l'inégalité (10) à $m = \varphi(n)$ ce qui nous donne $\left|x^{(\varphi(n))} - x^{(\varphi(n-1))}\right| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, ce qui achève la récurrence. ■

Lemme 9
Toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ possédant une valeur d'adhérence L converge vers L.
En particulier, une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ possède au plus une valeur d'adhérence.

Preuve :
Si L est une valeur d'adhérence de la suite $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ alors il existe une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(x^{(\varphi(n))})_{n\geqslant 0}$ converge vers L, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \exists N_1 \text{ tel que } \forall n \geqslant N, \quad \left|x^{(\varphi(n))} - L\right| \leqslant \varepsilon. \tag{11}$$

D'autre la condition de Cauchy pour la suite $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ s'écrit

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \exists N_2 \text{ tel que } \forall n \geqslant N_2, \quad \forall m \geqslant N_2, \quad \left|x^{(n)} - x^{(m)}\right| \leqslant \varepsilon.$$

En remarquant que $\forall n \geqslant 0, \quad \varphi(n) \geqslant n$, on en déduit qu'en posant $m = \varphi(n)$ dans la condition de Cauchy, on obtient que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \exists N_2 \text{ tel que } \forall n \geqslant N_2, \quad \left|x^{(n)} - x^{(\varphi(n))}\right| \leqslant \varepsilon. \tag{12}$$

La combinaison de (11) et (12) nous fournit la condition suivante

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \exists N = \max(N_1, N_2) \text{ tel que } \forall n \geqslant N_2, \quad \left|x^{(n)} - L\right| \leqslant \left|x^{(n)} - x^{(\varphi(n))}\right| + \left|x^{(\varphi(n))} - L\right| \leqslant 2\varepsilon$$

qui n'est rien d'autre que la convergence de la suite $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ vers L. ■

Théorème 3 (Complétude de $\mathbb{R}$)
Toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Preuve :
Considérons une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ que l'on note $(x^{(n)})$. Il suffit de démontrer qu'une certaine suite extraite est convergente dans $\mathbb{R}$. Considérons une suite extraite $(y^{(n)})_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall n \geqslant 0, \quad \left|y^{(n+1)} - y^{(n)}\right| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ (ceci est possible grâce au lemme 8). On choisit un représentant quelconque pour $y^{(0)}$ c'est-à_dire une suite de Cauchy de rationnels $(y_k^{(0)})_{k\geqslant 0}$. Pour le choix du représentant de $y^{(n)}$, on procède par récurrence de la façon suivante. Supposons avoir choisi un représentant $(y_k^{(n)})_{k\geqslant 0}$ du réel $y^{(n)}$: on choisit ensuite un représentant $(z_k)_{k\geqslant 0}$ de $\left|y^{(n+1)} - y^{(n)}\right|$ tel que $\forall k \geqslant 0, \quad z_k \geqslant 0$ (cela est possible grâce au corollaire 1) puis on définit un représentant de $y^{(n+1)}$ soit par $(y_k^{(n+1)})_{k\geqslant 0} = (z_k^{(n)})_{k\geqslant 0} + (y_k^{(n)})_{k\geqslant 0}$ si $\left|y^{(n+1)} - y^{(n)}\right| = y^{(n+1)} - y^{(n)}$ soit par $(y_k^{(n+1)})_{k\geqslant 0} = (y_k^{(n)})_{k\geqslant 0} - (z_k^{(n)})_{k\geqslant 0}$ si $\left|y^{(n+1)} - y^{(n)}\right| = y^{(n)} - y^{(n+1)}$. Ce choix des représentants nous permet alors d'avoir

$$\forall n \geqslant 0, \quad \forall k \geqslant 0 \quad \left|y_k^{(n+1)} - y_k^{(n)}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Nous allons construire maintenant un nombre réel qui va s'avérer la limite de la suite de réels $(y^{(n)})_{n\geqslant 0}$.
La suite $(y_k^{(0)})_{k\geqslant 0}$ est de Cauchy donc il existe un entier $\varphi(0)$ tel que

$$\forall k \geqslant \varphi(0), \quad \forall q \geqslant \varphi(0), \quad \left|y_q^{(0)} - y_k^{(0)}\right| \leqslant \frac{1}{2^0}.$$

De même, la suite $(y_k^{(1)})_{k\geqslant \varphi(0)+1}$ est de Cauchy donc il existe un entier $\varphi(1) \geqslant \varphi(0) + 1 > \varphi(0)$ tel que

$$\forall k \geqslant \varphi(1), \quad \forall q \geqslant \varphi(1), \quad \left|y_q^{(1)} - y_k^{(1)}\right| \leqslant \frac{1}{2^1}.$$

On construit ainsi par récurrence une suite strictement croissante d'entiers$(\varphi(n))_{n\geqslant 0}$ telle que

$$\forall k \geqslant \varphi(n), \quad \forall q \geqslant \varphi(n), \quad \left|y_q^{(n)} - y_k^{(n)}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}. \tag{13}$$

Montrons que la suite de rationnels $(y^{(n)}_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Pour commencer, nous avons l'inégalité suivante valable pour tous les entiers n, p positifs :

$$\left|y^{(n)} - y^{(n+p)}\right| = \left|\sum_{s=n}^{n+p-1} (y^{(s)} - y^{(s+1)})\right| \leqslant \sum_{s=n}^{n+p-1} \left|y^{(s)} - y^{(s+1)}\right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}.\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-p}}{1-(1/2)} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \tag{14}$$

Quels que soient n et p positif, le réel $\left|y^{(n)} - y^{(n+p)}\right|$ est strictement petit que $\frac{1}{2^n}$. La définition de la relation d'ordre $<$ montre qu'il existe un rang $N(n,p)$ tel que

$$\forall k \geqslant N(n,p), \quad \left|y^{(n)}_k - y^{(n+p)}_k\right| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Considérons l'entier auxiliaire $K = \max(N(n,p), \varphi(n), \varphi(n+p))$ alors pour tous les entiers n, p, les majorations (13) et (14) montrent que l'on a

$$\begin{aligned}
\left|y^{(n)}_{\varphi(n)} - y^{(n+p)}_{\varphi(n+p)}\right| &= \left|(y^{(n)}_{\varphi(n)} - y^{(n)}_k) + (y^{(n)}_k - y^{(n+p)}_k) + (y^{(n+p)}_k - y^{(n+p)}_{\varphi(n+p)}\right| \\
&\leqslant \left|y^{(n)}_{\varphi(n)} - y^{(n)}_k\right| + \left|y^{(n)}_k - y^{(n+p)}_k\right| + \left|y^{(n+p)}_k - y^{(n+p)}_{\varphi(n+p)}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n+p}} \leqslant \frac{3}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Nous venons donc de majorer $\left|y^{(n)}_{\varphi(n)} - y^{(n+p)}_{\varphi(n+p)}\right|$ par une suite indépendante de p et tendant vers 0 quand $n \to +\infty$ ce qui démontre que la suite de rationnels $(y^{(n)}_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ donc nous définissons un réel y en posant $y = (y^{(n)}_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0} \bmod \mathfrak{J}$.
Démontrons que la suite de réels $(y^{(n)})_{n\geqslant 0}$ converge vers le réel y dans $\mathbb{R}$. Pour cela, il suffit de montrer que la suite $\left|(y)_k - (y^{(n)})_k\right| = \left|y^{(k)}_{\varphi(k)} - y^{(n)}_k\right|$ converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$ uniformément par rapport à k. Considérons k et n deux entiers. Les suites $(y^{(k)}_q)_{q\geqslant 0}$ et $(y^{(n)}_q)_{q\geqslant 0}$ sont des suites de Cauchy de rationnels. Si nous posons $q = \max(\varphi(k), N(n,k), \varphi(n),)$, alors $\forall k \geqslant n$, les majorations (13) et (14) nous démontrent l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
\left|y^{(k)}_{\varphi(k)} - y^{(n)}_k\right| &= \left|(y^{(k)}_{\varphi(k)} - y^{(k)}_q) + (y^{(k)}_q - y^{(n)}_q) + (y^{(n)}_q - y^{(n)}_k)\right| \\
&\leqslant \left|y^{(k)}_{\varphi(k)} - y^{(k)}_q\right| + \left|y^{(k)}_q - y^{(n)}_q\right| + \left|y^{(n)}_q - y^{(n)}_k\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{3}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Pour n fixé, nous avons donc $\forall k \geqslant n, \quad \left|y^{(k)}_{\varphi(k)} - y^{(n)}_k\right| \leqslant \frac{3}{2^{n-1}}$ et la partie 3) du corollaire 1 nous montre que $\left|y - y^{(n)}\right| \leqslant \frac{3}{2^{n-1}}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^\times_+$: le théorème 1 montre qu'il existe un rationnel a tel que $0 < a < \varepsilon$. La suite de rationnels $(\frac{3}{2^{n-1}})_{n\geqslant 0}$ converge cers 0 dans $\mathbb{Q}$ donc il existe un entier N tel que $\forall n \geqslant N, \quad \frac{3}{2^{n-1}} < a$. Ainsi, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^\times_+, \quad \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, \quad \left|y - y^{(n)}\right| \leqslant \frac{3}{2^{n-1}} \leqslant a < \varepsilon$ ce qui signifie que la suite de réels $(y^{(n)})_{n\geqslant 0}$ converge vers le réel y donc la suite de réels $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ converge vers le réel y. ■

5 Existence des bornes supérieures et inférieures

La dernière propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ est l'existence d'une borne supérieure d'un ensemble majoré et d'une borne inférieure pour un ensemble minoré. Etant donné son importance, nous en donnons ici la preuve. Nous supposons acquis la notion de majorant d'un ensemble.

La preuve se réduira à l'existence de bornes supérieures qui se démontrera à l'aide du principe dichotomique.

Définition 9

1. *Soit S un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$. On appelle borne supérieure de S tout majorant M de S tel que pour tout majorant M' de S, on ait $M \leqslant M'$.*
2. *Soit S un sous-ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$. On appelle borne inférieure de S tout minorant m de S tel que pour tout minorant m' de S, on ait $m' \leqslant m$.*

Lemme 10
Si un ensemble S non vide et majoré de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure alors cette borne supérieure est unique.
Si un ensemble S non vide et minoré de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure alors cette borne inférieure est unique.

Preuve :
Soit M_1 et M_2 deux bornes supérieures de S alors par définition $M_1 \leqslant M_2$ (car M_2 est un majorant de S et M_1 est une borne supérieure de S) et $M_2 \leqslant M_1$ (car M_1 est un majorant de S et M_2 est une borne supérieure de S). Le cas des bornes inférieures se traitent de la même façon. ■

Définition 10

1. *Si S est sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$, on note* $\sup S$ *l'unique borne supérieure de S.*
2. *Si S est sous-ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$, on note* $\inf S$ *l'unique borne inférieure de S*

Lemme 11
Si tout sous-ensemble S non vide et majoré de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure alors tout sous-ensemble S' non vide et minoré de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure. Dans ce cas, $\inf S' = -\sup\{-s,\ s \in S'\}$

Preuve :
Soit S' un ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$ alors il existe un minorant m_1 de S' donc $\forall s \in S', \quad m_1 \leqslant s \Rightarrow \forall s \in S', \quad -s \leqslant -m_1$ ce qui montre que l'ensemble $S = \{-s,\ s \in S'\}$ est non vide et majoré de $\mathbb{R}$. Notons $M = \sup S$ sa borne supérieure. Il est immédiat que si m est un minorant de S alors $-m$ est un majorant de S' ce qui implique que $M \leqslant -m \Leftrightarrow m \leqslant -M$ et on en déduit que $-M$ est la borne inférieure de S. ■

Théorème 4
Tout sous-ensemble S non vide et majoré de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
En outre, il existe une suite $(s_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de S tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \sup S$

Preuve :
Soit M un majorant de S et s un élément de S (donc $s \leqslant M$). On construit par récurrence deux suites de réels $(s_n)_{n\geqslant 0}$ (qui est croissante) et $(M_n)_{n\geqslant 0}$ (qui est décroissante) telles que $\forall n \geqslant 0,\ s_n \in S, \quad M_n$ est un majorant de S et $0 \leqslant M_n - s_n \leqslant \dfrac{M-s}{2^n}$. On définit s_0 et M_0 par $s_0 = s$ et $M_0 = M$. Supposons avor construit s_n et M_n. Considérons l'intervalle $[s_n, M_n]$

- s'il n'existe aucun élément de S dans l'intervalle $[\dfrac{M_n+s_n}{2}, M_n]$, ce qui signifie que tous les éléments de S situés dans l'intervalle $[s_n, M_n]$ appartienne à l'intervalle $[s_n, \dfrac{M_n+s_n}{2}]$ (de longueur $\dfrac{M_n-s_n}{2}$). En particulier, $\dfrac{M_n+s_n}{2}$ est un majorant de S. On pose alors $s_{n+1} = s_n \in S$ et $M_{n+1} = \dfrac{M_n+s_n}{2}$. En outre, on a $s_{n+1} \geqslant s_n, \quad M_{n+1} \leqslant M_n$ et
$$0 \leqslant M_{n+1} - s_{n+1} \leqslant \frac{M_n-s_n}{2} \leqslant \frac{M-s}{2^{n+1}}$$
- s'il existe un élément s_{n+1} de S dans l'intervalle $[\dfrac{M_n+s_n}{2}, M_n]$ (de longueur $\dfrac{M_n-s_n}{2}$), on pose $M_{n+1} = M_n$. Il est immédiat que $s_{n+1} \geqslant s_n, \quad M_{n+1} \leqslant M_n$ et
$$0 \leqslant M_{n+1} - s_{n+1} \leqslant \frac{M_n-s_n}{2} \leqslant \frac{M-s}{2^{n+1}}$$

ce qui achève la récurrence.

La construction de la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ nous permet d'affirmer que

$$0 \leqslant M_n - M_{n+1} \leqslant \frac{M_n - s_n}{2} \leqslant \frac{M-s}{2^{n+1}}$$

La majoration

$$\forall n \geqslant 0, \quad \forall p \geqslant 1, \quad 0 \leqslant M_n - M_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1}(M_{n+k} - M_{n+k+1}) \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} \frac{M-s}{2^{n+k+1}} \leqslant \frac{M-s}{2^n}(1 - (\frac{1}{2})^p) \leqslant \frac{M-s}{2^n}$$

est indépendante de p et le majorant tend vers 0 quand $n \to +\infty$ donc la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy. Elle converge vers un réel M' et la majoration $0 \leqslant M_n - s_n \leqslant \dfrac{M-s}{2^n}$ nous montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = M'$.
Par construction, $\forall x \in S, \quad \forall n \geqslant 0, \quad x \leqslant M_n$ donc, par passage à la limite, on obtient que $\forall x \in S, \quad x \leqslant M'$ ce qui signifie que M' est un majorant de S.
Soit K un majorant de S. Pour tout entier naturel n, nous disposons de la majoration $s_n \leqslant K$ et, en passant à la limite, nous obtenons $M' \leqslant K$. Le réel M' est donc une borne supérieure de S et $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = M'$. ■