Abdellah Bechata

Table des matières

Résumé

1 Réinterprétation de l'analyse de Fourier dans le cas des groupes non commutatifs

Rappel

Dans l'article consacré à l'analyse harmonique sur les groupes finis commutatifs, nous avons introduit les opérateurs de translation $R(g)$ sur l'espace des fonctions de G dans $\mathbb{C}$, noté $L^2(G)$, où l'opérateur $R(g)$ a été défini par

$$\forall u \in L^2(G) \text{ et } \forall h \in G, \quad [R(g)u](h) = u(h+g)$$

avec $+$ désignant la loi du groupe commutatif g. Pour $g \in G$ fixé, l'opérateur est un endomorphisme inversible de $L^2(G)$ et l'application $g \mapsto R(g)$ est un morphisme du groupe G dans $GL(L^2(G))$, i.e.

$$\forall g, g' \in G, \quad R(g+g') = R(g)R(g').$$

Le groupe G étant fini, on munit le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $L^2(G)$ du produit scalaire hermitien

$$< u, v >_{L^2(G)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u(g)\overline{v(g)}.$$

Pour ce produit scalaire, l'opérateur $R(g)$ est unitaire donc diagonalisable en base orthonormale. De plus, les opérateurs $R(g)$ commutant deux à deux, nous pouvons les codiagonaliser en base orthonormale. Nous avons montrer qu'il existe une unique base (modulo la multiplication par des constantes de module 1 convenables des éléments de la base) qui réalisait cette codiagonalisation : elle était formée de tous les caractères de G. De ce fait, nous avons montré que l'application, convenablement normalisée, qui à une fonction $u \in L^2(G)$ associe ses coordonnées dans cette base est une isométrie de $L^2(G)$ sur $L^2(\widehat{G})$ et nous l'avons appeller transformation de Fourier sur $L^2(G)$.

Ebauche de généralisation

Nous souhaitons généraliser cette méthode au cas d'un groupe fini $(G, .)$ à priori non commutatif (rappelons que lorsque le groupe est commuatif, on note traditionnellement sa loi $+$, mais si le groupe est non commutatif, on privilégie la notation . , en réference à la loi du groupe non commutatif $GL_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif). Le point de vue le plus naturel est définir l'espace $L^2(G)$ des fonctions de G dans $\mathbb{C}$ ainsi que les opérateurs $R(g)$ définis par

$$\forall u \in L^2(G) \text{ et } \forall h \in G, \quad [R_d(g)u](h) = u(h.g)$$

Il est aisé de vérifier qu'il s'agit d'endomorphisme inversible de $L^2(G)$ (c'est un jeu d'écriture).
Ces opérateurs $R(g)$ sont unitaires si l'on considère le produit scalaire sur $L^2(G)$

$$\forall u, v \in L^2(G), \quad < u, v >_{L^2(G)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u(g) \overline{v(g)} \tag{1}$$

donc on peut les diagonaliser individuellement en base orthonormale (qui dépend bien entendu de l'élément g).
L'appplication

$$R_d : \left\{ \begin{array}{c} G \to GL(L^2(G)) \\ g \mapsto R_d(g) \end{array} \right. \quad \text{avec } \forall u \in L^2(G) \text{ et } \forall h \in G, \ \ [R_d(g)u]\,(h) = u(h.g)$$

est un morphisme de groupe. En effet,

$$\forall u \in L^2(G), \forall g, g', h \in G, \quad [R_d(g)R_d(g')u](h) = [R_d(g')u](hg) = u((hg).g') = u(h.(gg')) = [R_d(g.g')u](h).$$

Pouvons codiagonaliser tous les opérateurs $R(g)$? La réponse est à priori négative car le groupe G n'étant plus commutatif,

$$R_d(g)R_d(g') = R_d(g.g') \neq R_d(g'.g) = R_d(g')R_d(g)$$

les opérateurs ne commutent plus deux à deux donc on ne peut les codiagonaliser (la codiagonalisation implique la commutation des opérateurs).

Pour essayer d'aller plus loin, nous allons discuter de l'intérêt de la diagonalisabilité d'un endomorphisme puis de la codiagonalisabilité d'une famille d'endomorphismes et enfin la coréduction d'une famille d'endomorphismes.

réduction d'un endomorphisme

Par exemple, lorsque que nous somme confronté à un problème de nature affine de la forme

$$(E) : a(x) = b,$$

il est intéressant de déterminer une décomposition de notre espace E comme une somme directe de sous-espaces E_i stables par a. En effet, si $E = \bigoplus_i E_i$, le vecteur x s'écrit sous la forme $\sum_i x_i$, le vecteur b s'écrit sous la forme $\sum_i b_i, et$ si l'on note a_i l'endomorphisme de E_i défini par $a_i = a_{|E_i}$, le problème (E) revient à résoudre tous les problèmes

$$(E_i) : a_i(x_i) = b_i.$$

On souhaite bien entendu que ces nouvelles équations soient beaucoup plus simples que l'équation originelle, c'est-à-dire que l'endomorphisme a_i soit le plus simple possible.
Si a est diagonalisable, on peut choisir comme décomposition de $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(a)} E_\lambda$, l'endomorphisme a_λ agit très simplement sur E_λ, en l'occurence il agit sous la forme d'une homothétie de rapport λ de l'espace E_λ. En d'autres termes, la matrice de a dans une base associée à cette décomposition est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r I_r \end{pmatrix}.$$

Le problème

$$(E) : a(x) = b,$$

devient équivalent aux différents problèmes

$$\forall \lambda \in Sp(a), \quad (E_\lambda) : \lambda x_\lambda = b_\lambda.$$

qui sont extrémement simples à résoudre.
Si a n'est pas diagonalisable, les espaces propres ne sont plus des espaces pertinents. Le théorème des noyau montre

que l'on peut choisir les espaces $E_i = \ker(a - \lambda_i Id)^{r_i}$. Dans ce cas, l'opérateur a_i est la somme d'une homothétie de rapport λ_i et d'un endomorphisme nilpotent $(a - \lambda_i Id)_{|E_i}$ ce qui est plus agréable que l'endomorphisme a initial. On est ramener à donc a connaitre une décomposition optimale d'un endomorphisme nilpotent, ce qui est donné par le théorème de décomposition de Jordan. Ce théorème nous fourni les espaces E_i optimaux et dans ce cas les endomorphismes a_i correspondants ont comme matrice, dans une base convenable, un multiple de l'identité (c'est très sympathique) ou une matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & (0) \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \lambda \end{pmatrix} \text{(qui est presque aussi sympathique)}$$

Coréduction d'une famille d'endomorphismes

Par exemple, lorsque que nous somme confronté à un nombre fini de problèmes de nature affine de la forme

$$\forall \alpha, \ (E_\alpha) : a_\alpha(x) = b_\alpha,$$

où chacun des endomorphismes est diagonalisable.
Si les opérateurs a_α commutent deux à deux , le lemme de codiagonalisation (cf. l'article sur l'analyse harmonique sur les groupes finis commutatifs) montre que l'on peut choisir une certaine décomposition de $E = \bigoplus_i E_i$ où les E_i sont des sous-espaces stables par tous les a_α et sur lesquels les opérateurs a_α agissent comme des homothéties. On en déduit les matrices de a_1 et a_2 sont, dans une même base convenable, diagonales.
Les problèmes (E_α) se ramènent aux problèmes à des problèmes sur des espaces qui satisfont à des règles de transfomations simples sous l'action des endomorphismes (a_α)

$$\forall \alpha, \forall i, \quad (E_{\alpha,i}) : \lambda_{\alpha,i} x_i = b_{\alpha,i}$$

qui sont très simples à résoudre.
Malheureusement, les opérateurs (a_α) ne commutent pas en général donc il est illusoire de vouloir les codiagonaliser (la codiagonalisation implique que les opérateurs commutent !).

1. Traitons, pour commencer l'exposé, l'exemple de deux endomorphismes a_1 et a_2. Nous supposerons que a_1 et a_2 sont deux endomorphismes unitaires d'un espace E de dimension finie.
Nous pourrions décider de diagonaliser l'endomorphisme a_1 et donc de décomposer E sous la forme $\bigoplus_i E_i$ où les E_i sont des sous-espaces propres de a_1. Les endomorphismes a_1 et a_2 ne commutant pas (à priori), les applications linéaires $a_{2,i} = (a_2)_{|E_i}$ ne sont plus nécessairement des endomorphismes. Nous ne pouvons faire mieux que d'écrire la matrice de a_2 dans une base associée à la décomposition $E = \bigoplus_i E_i$. Cette matrice n'est certainement pas une matrice par bloc.
En priviligiant la diagonalisation de a_1, nous avons une écriture agréable pour la matrice de a_1 mais, en contre-partie, nous avons une matrice absolument quelconque pour a_2 ! Le résultat est identique en permutant les rôles de a_1 et a_2.
Cette stratégie n'est pas convenable car le but n'est plus d'obtenir une matrice agréable pour un endomorphisme et n'importe quoi pour le second mais d'obtenir des matrices les plus agréables pour les deux matrices. Bien entendu, sous serons obliger de faire des compromis. Les matrices de chacun des endomorphismes ne seront pas nécessairement agréables pour chaque endomorphisme pris individuellement mais elles seront agréables collectivement (d'où le célèbre problème philosophique : la dualité intérêt individuel et intérêt collectif que nous allons transposer dans un cadre mathémtique :=)).
Considérons $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-espaces V non-nuls de E qui sont stables par a_1 <u>et</u> a_2 ainsi que
$$\mathcal{G} = \{\dim V, \quad V \in \mathcal{F}\}.$$
L'ensemble $\mathcal{F}$ est non vide puisque E est stable par a_1 et a_2 donc $\dim E$ appartient à $\mathcal{G}$. L'ensemble $\mathcal{G}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ ce qui implique qu'il possède un minimum $d > 0$.

Soit E_1 un élément de $\mathcal{F}$ tel que $\dim E_1 = d$. L'espace V_1 est stable par les endomorphismes a_1 et a_2. Existe-t-il un sous-espace de E_1 stable par a_1 et a_2 ? Soit $W \subset E_1$ un tel sous-espace. Si $W \neq \{0\}$ alors $W \in \mathcal{F}$ ce qui implique que $\dim W \geqslant d = \dim E_1$, or $W \subset E_1$ donc $W = E_1$.
Par conséquent, les seuls sous-espaces de E_1 qui sont stables par a_1 et a_2 sont les espaces $\{0\}$ et E_1.
Les endomorphismes a_1 et a_2 étant unitaires, l'espace $E_1^\perp$ est stable par a_1 et a_2. Nous définissons donc quatre endomorphismes en posant

$$a_{1,1} = (a_1)_{|E_1},\ a_{1,2} = (a_1)_{|E_1^\perp},\ a_{2,1} = (a_2)_{|E_1},\ a_{2,2} = (a_2)_{|E_1^\perp}$$

Les endomorphismes $a_{1,2}$ et $a_{2,2}$ sont des endomorphismes unitaires de $E_1^\perp$ et $\dim E_1^\perp = \dim E - \dim E_1 < \dim E$.
On en déduit par une récurrence sur la dimension de E qu'il existe une famille de sous-espaces (E_i) tels que $E = \overset{\perp}{\bigoplus_i} E_i$, chaque sous-espace E_i est stable par a_1 et a_2 et les seuls sous-espaces de E_i qui sont stables par a_1 et a_2 sont les espaces $\{0\}$ et E_i.
On en déduit les matrices de a_1 et a_2 sont, dans une même base convenable, les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & & (0) & \\ & A_{1,2} & & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & A_{1,r} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A_{2,1} & & (0) & \\ & A_{2,2} & & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & A_{2,r} \end{pmatrix}$$

où les matrices C_i et D_i sont de mêmes tailles et qu'elles ont les tailles les plus petites possibles. Nous venons donc de montrer que même si les endomorphismes a_1 et a_2 ne commutent pas nous pouvons néanmoins les coréduire simmultanément. Nous remarquons que la taille de $A_{1,i}$ et $A_{2,i}$ sont identiques (personne n'a été privilégié). En particulier, si a_1 et a_2 commutent, on constate que chaque espace E_i est l'espace engendré par un vecteur propre de a_1 et a_2 et que leurs matrices respectives dans la base associée sont diagonales).
Le double problème

$$(E_1) : a_1(x) = b_1, \quad (E_2) : a_2(x) = b_2$$

se ramène aux doubles problèmes

$$(E_{1,i}) : a_{1,i}(x_i) = b_{1,i}, \quad (E_{2,i}) : a_{2,i}(x_i) = b_{2,i}$$

où les systèmes $(E_{1,i})$ et $(E_{2,i})$ sont de même taille et que cette taille est minimale.

2. Plus généralement, si (a_i) est une famille finie d'endomorphismes unitaires de E alors il existe une décomposition $E = \overset{\perp}{\bigoplus_j} E_i$, chaque sous-espace E_j est stable par tous les endomorphismes (a_i) et les seuls sous-espaces de E_i qui sont stables par tous les (a_i) sont les espaces $\{0\}$ et E_i. En particulier, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de E telle que les matrices des (a_i) sont les matrices suivantes

$$B_1 = \begin{pmatrix} A_{1,1} & & (0) & \\ & A_{1,2} & & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & A_{1,r} \end{pmatrix},\quad B_2 = \begin{pmatrix} A_{2,1} & & (0) & \\ & A_{2,2} & & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & A_{2,r} \end{pmatrix}, .., B_l = \begin{pmatrix} A_{l,1} & & (0) & \\ & A_{l,2} & & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & A_{l,r} \end{pmatrix}.$$

Interprétaion matricielle de ces égalités : soit $\mathcal{B}$ une base de E (par exemple la base canonique si les a_i sont des endomorphismes de $E = \mathbb{R}^n$) et C_i désigne la matrice de a_i dans cette base. Soit T la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$. Alors, on a les égalités suivantes :

$$\forall i \in \{1, .., l\}, \quad C_i = T B_i T^{-1}$$

ce qui signifie que nous venons de coréduire les matrices $(C_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$

Dans le cas où le groupe G est fini mais non nécessairement commutatif, les opérateurs $R(g)$ sont unitaires mais ils ne commutent plus nécessairement. Il existe une décomposition $E = \overset{\perp}{\bigoplus_{j}} E_i$ et une base adaptée à cette décomposition telle que

$$\forall g \in G, \quad Mat(R_d(g)) = \begin{pmatrix} Mat(R_d(g))_1 & & (0) & \\ & Mat(R_d(g))_2 & & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & Mat(R_d(g))_r \end{pmatrix}.$$

La matrice $Mat(R_d(g))$ étant inversible, les matrices $Mat(R_d(g))_i$ sont inversibles. Le calcul par bloc des matrices montrent que $g \mapsto R_d(g)_{|E_i}$ est un morphisme de G dans $GL(E_i)$ et pour i fixé, les seuls sous-espaces de E_i stable par tous les opérateurs $(R_d(g)_{|E_i})$ sont les espaces $\{0\}$ et E_i.

Remarque 1.1 (La théorie des représentations linéaires des groupes)
En général, il est très compliqué en général de vouloir coréduire une famille arbitraire d'automorphismes sur les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (ou, ce qui est équivalent, de matrices complexes inversibles). Par contre, on peut élaborer une théorie complète dans le cas où la famille d'automorphismes est un groupe pour la composition des automorphismes (ou de façon équivalente, une famille de matrices complexes inversibles qui est un groupe pour la multiplication des matrices complexes inversibles). La théorie qui développe cette étude s'appelle la théorie des repésentations linéaires complexes des groupes finis. Bien entendu, on peut vouloir faire la même théorie sur un corps k quelconque (pas nécessairement $\mathbb{C}$) et/ou remplacer la condition de finitude par un groupe arbitraire et/ou éliminez la condition de finitude de la dmension. C'est possible (mais pas nécessairement très simples !) sous certaines restrictions restrictives mais nous ne les aborderons pas dans cet article.

Une définition d'algèbre linéaire

Définition 1.1 (sommes directes d'espaces vectoriels et d'endomorphismes)
Soient n sous-espaces vectoriels $(E_1)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'un k-espace vectoriel E en somme directe , i.e.$\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = E$ et n endomorphismes $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, tels que $u_i \in \mathcal{L}(E_i)$. On appelle somme directe de ses n endomorphismes, l'endomorphisme $\bigoplus_{i=1}^{n} u_i$ de E défini par

$$\bigoplus_{i=1}^{n} u_i : \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^{n} E_i = E & \to \quad \bigoplus_{i=1}^{n} E_i = E \\ x_1 + .. + x_n & \mapsto \quad u_1(x_1) + .. + u_n(x_n) \end{cases}$$

En particulier,

$$\forall i \in \{1, .., n\}, \quad u_i \in GL(E_i) \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} u_i \in GL(E)$$

$$\operatorname{tr}(\bigoplus_{i=1}^{n} u_i) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr} u_i \tag{2}$$

A la rubrique **coréduction** page 3, nous avons décomposer un endomorphisme u relativement à une famille de sous-espaces stables (E_i) ce qui nous a fourni une famille d'endomorphismes (u_i), où $u_i \in \mathcal{L}(E_i)$. En utilisant la terminologie de la définition 1.1, on peut résumer ceci par les relations suivantes :

$$E = \bigoplus_{i} E_i \text{ et } u = \bigoplus_{i} u_i.$$

Réciproquement, si nous disposons d'une famille d'endomorphismes $u_i \in \mathcal{L}(E_i)$, où les E_i sont des sous-espaces d'un même espace E, il est possible de construire un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$E = \bigoplus_{i} E_i \text{ et } u = \bigoplus_{i} u_i.$$

Cette définition est la généralisation du résultat classique : un endomorphisme est caractérisé par la donnée de ces valeurs sur une base.
Supposons que le k-espace vectoriel E soit de dimension finie, alors pour chaque entier i, le k-espace vectoriel E_i est de dimension finie. Considérons pour chaque entier i, une base $\mathcal{B}_i$ de E_i et A_i la matrice de u_i dans cette base $\mathcal{B}_i$. Il est immédiat que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ forme une base de $\prod_{j=1}^{n} E_j$. Si A désigne la matrice de $\bigoplus_{i=1}^{n} u_i$ dans la base $\mathcal{B}$, l'égalité suivante est vérifiée (je laisse au lecteur le soin de la justifier, ce qui est très élémentaire) :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) & \\ & A_2 & & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}.$$

On déduit immédiatement que si $\forall i \in \{1,..,n\}, \quad u_i \in GL(E_i)$ alors $\bigoplus_{i=1}^{n} u_i \in GL(E)$. Nous avons également la formule remarquable

D'autres classes d'opérateurs possibles

Revenons à définition des opérateurs $R_d(g)$. Nous l'avons défini par la formule

$$R_d : \left\{ \begin{array}{c} G \to GL(L^2(G)) \\ g \mapsto R_d(g) \end{array} \right. \quad \text{avec } \forall u \in L^2(G) \text{ et } \forall h \in G,\ \ [R_d(g)u](h) = u(h.g) \tag{3}$$

en faisant agir G sur lui-même à droite. Le morphisme R_d est appelé **représentation régulière droite de G**.

Nous pouvons également le faire agir à gauche,

$$R_g : \left\{ \begin{array}{c} G \to GL(L^2(G)) \\ g \mapsto R_g(g) \end{array} \right. \quad \text{avec } \forall u \in L^2(G) \text{ et } \forall h \in G,\ \ [R_g(g)u](h) = u(g^{-1}.h) \tag{4}$$

ce qui nous fourni la **représentation régulière gauche** de G (le g en indice est l'abréviation de gauche et il ne désigne donc par l'élément g du groupe G !)

Le groupe G agit sur lui-même par conjuguaison, ce qui nous fourni la représentation suivante de G,

$$R_c : \left\{ \begin{array}{c} G \to GL(L^2(G)) \\ g \mapsto R_c(g) \end{array} \right. \quad \text{avec } \forall u \in L^2(G) \text{ et } \forall h \in G,\ \ [R_c(g)u](h) = u(g^{-1}.h.g) \tag{5}$$

autrement dit $\forall g \in G, \quad R_c(g) = R_d(g) \circ R_g(g) = R_d(g) \circ R_g(g)$.

Plus généralement, si G agit sur un ensemble fini X par $\begin{array}{ccc} G \times X & \to & X \\ (g,x) & \mapsto & g.x \end{array}$ nous définissons la **représentation quasi-régulière** de G sur $L^2(X)$ par

$$R_{(G,X)} : \left\{ \begin{array}{c} G \to GL(L^2(X)) \\ g \mapsto R_{(G,X)}(g) \end{array} \right. \quad \text{avec } \forall u \in L^2(G) \text{ et } \forall x \in X,\ \ \left[R_{(G,X)}(g)u\right](x) = u(g.x) \tag{6}$$

où $L^2(X)$ désigne les fonctions de X dans $\mathbb{C}$. En particulier, la représentation R_c correspond au cas où $X = G$ et l'action de groupe est défini par $g.h = g^{-1}hg$.

Les morphismes R_d et R_c sont injectifs (il suffit d'évaluer $R_d(g)(\delta_t)$ où δ_t est la masse de Dirac en t, i.e. la fonction nulle sur G sauf en t, où elle vaut 1).

Par contre, les morphismes R_c et $R_{(G,X)}$ ne sont pas nécessairement injectifs.

- Si z appartient au centre $Z(G) = \{g \in G, \quad gh = hg \quad \forall h \in G\}$ de G alors $R_c(z) = Id$. En particulier, si $Z(G) \neq 1$, il existe $z \neq 1$ tel que $R_c(z) \neq Id$.
  Par exemple, pour le groupe $G = GL_n(\mathbb{K})$, on a $Z(GL_n(\mathbb{K})) = \{\lambda Id, \quad \lambda \in \mathbb{K}\} \neq \{1\}$.
- Soit $H = \{g \in G, \quad \forall x \in X, \quad g.x = x\}$. Supposons que $H \neq \{1\}$ alors $\forall h \in H, \quad R_{(G,X)}(h) = Id$.

2 Introductions aux représentations linéaires complexes

Vocabulaire des représentations linéaires

Définition 2.1 (représentation d'un groupe)
Soit G un groupe fini. Une représentation linéaire (complexe) de G est la donnée d'un couple (V, π) où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et π est un morphime de groupe de G dans $GL(V)$. Si aucune confusion n'est possible, on note π la représentation (V, π). Dans ce cas, V_π désignera l'espace vectoriel associé c'est-à-dire V.
Le degré d_π de la représentation π est la dimension de V_π, c'està-dire $d_\pi = \dim V_\pi$

Définition 2.2 (caractères d'un groupe)
Soit G un groupe fini. Un caractère de G est un morphisme de G dans S^1

Remarque 2.1
Si (V, π) est une représentation de G, $\pi(1) = Id_V$ (un morphisme de groupe transforme l'élément neutre en élément neutre).
La donnée d'une représentation de degré finie π de G dans $GL(V_\pi)$ nous fourni une famille d'automorphismes $\mathcal{A} = \{\pi(g), \quad g \in G\}$ sur l'espace vectoriel complexe de dimension finie V_π. L'application π est un morphisme donc l'ensemble $\mathcal{A}$ est un groupe d'automorphismes pour la composition
Réciproquement, donnons nous une famille $\mathcal{A}$ d'automorphismes d'un espace vectoriel V. Posons comme groupe $G = \mathcal{A}$, l'application $\pi : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & GL(V) \\ A & \mapsto & A \end{array} \right.$ est une représentation de G.
Nous verrons sur quelques exemples que l'étude des représentations linéaires complexes des groupes finis est équivalentes à la coréduction des groupes d'automorphismes sur les espaces vectoriels complexes (cf. la remarque 1.1)
L'idée d'étudier les représentations des groupes plutôt que la coréduction directe des groupes G d'automorphismes est dû au fait que les résultats fondamentaux de coréduction proviennent non pas de la forme explicite des endomorphismes (matrices) appartenant à ce groupe mais proviennent de la structure du groupe G lui-même !

Exemple 2.1

1. Soit G un groupe commutatif et χ un caractère de G. L'application
$$R_\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & GL_1(\mathbb{C}) \\ g & \mapsto & \chi(g) Id_{\mathbb{C}} \end{array} \right. \tag{7}$$
est une représentation de degré 1 de G.
2. Les représentations régulières gauche et droite définies respectivements par les formules 3 et 4 sont des représentations de degré $\operatorname{card} G$ de G.
3. La représentation quasi régulière de G sur $L^2(X)$, définie par la formule 6, est une représentation de degré $\operatorname{card} X$ de G.
4. Soient $G = \mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations d'un ensemble à n éléments et V un espace vectoriel de dimension n, dont on fixe une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Pour tout élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on associe l'unique endomorphisme de V caractériser sur la base $\mathcal{B}$ par
$$\forall i \in \{1, .., n\}, \quad u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$
L'endomorphisme u_σ transforme (globalement) la base $\mathcal{B}$ en elle-même donc $u_\sigma \in GL(V)$. Je laisse au lecteur le soin de vérifier que l'application
$$\pi_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \rightarrow & GL(V) \\ \sigma & \mapsto & u_\sigma \end{array} \right.$$
est une représentation de degré n de $\mathfrak{S}_n$ (qui est de cardinal $n!$)

Définition 2.3 (représentation unitaire)
Une représentation π est dite unitaire ssi V_π est un espace hermitien et $\forall g \in G, \quad \pi(g) \in U(V_\pi)$ (groupe des isométries complexes de V_π, i.e. des matrices A tel que $AA^* = Id_{V_\pi}$).

Lemme 2.1 (l'astuce unitaire de Weyl)
Soit π une représentation linéaire complexe d'un groupe fini G. L'application

$$(.,.)_\pi : \left\{ \begin{array}{lcl} V_\pi \times V_\pi & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\pi(g)x,\pi(g)y) \end{array} \right.$$

est un produit scalaire hermitien sur V_π et π est une représentation unitaire pour ce produit scalaire.

Preuve :
L'espace vectoriel complexe V_π étant de dimension finie, il possède au moins un produit scalaire $(.,)$. L'application $(.,.)_\pi$est clairement une forme bilinéaire hermitienne. Soit $x \in V_\pi$ tel que $(x,x)_\pi = 0$ alors

$$\sum_{g\in G}\|\pi(g)x\|^2 = 0 \Rightarrow \forall g\in G, \quad \|\pi(g)x\|^2 = 0 \Rightarrow \forall g \in G, \quad \pi(g)x = 0$$

où $\|.\|$ désigne la norme associée au produit scalaire $(.,.)$. On fixe $g=1$ alors $\pi(1) = Id$ d'où $x = \pi(1)x = 0$. L'application $(.,.)_\pi$ définit donc un produit scalaire hermitien sur V_π. Pour tout $g' \in G$, on a

$$\left\|\pi(g')x\right\|_\pi^2 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left\|\pi(g)\pi(g')x\right\|^2 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left\|\pi(gg')x\right\|^2 \underset{g\leftarrow gg'}{=} \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\|\pi(g)x\|^2 = \|x\|_\pi^2$$

ce qui montre que $\pi(g')$ est un endomorphisme unitaire de V_π.
Considérons π' la représentation de G dont l'espace sous-jacent est V_π muni du produit scalaire $(.,.)_\pi$ et telle que $\forall g \in G, \quad \pi'(g) = \pi(g)$ alors l'identité de V_π est un opérateur d'entrelacement entre V_π et $V_{\pi'}$ qui est inversible. ∎

Ainsi toute représentation unitaire de G peut être supposer unitaire si l'on muni l'espace vectoriel sous-jacent V_π d'un produit scalaire convenable. Dans toute la suite, on supposera que les représentations sont unitaires.

Définition 2.4 (sous-représentation d'une représentation)
Soit π une représentation unitaire de G et W un sous-espace de V_π stable par tous les opérateurs $(\pi(g))_{g\in G}$, alors l'application

$$\pi' : \left\{ \begin{array}{lcl} G & \rightarrow & U(W) \\ g & \mapsto & \pi(g)_{|W} \end{array} \right.$$

est une représentation unitaire de G, que l'on note π_W. On dit également qu'il s'agit d'une sous-représentation unitaire de G et l'espace vectoriel sous-jacent V_{π_W} est W.

Remarque 2.2
Il ne faut pas confondre π_W avec $\pi_{|W}$. En effet, pour g fixé, $\pi_W(g)$ est la restriction de $\pi(g)$ au sous-espace stable W alors que $\pi_{|W}$ désigne la restriction de l'application π (qui va de G dans $GL(V)$) à W, qui n'est pas un sous-ensemble de G !

Définition 2.5 (somme directe de représentions)
Soient $(\pi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ n sous-représentations d'une représentation unitaire linéaire π d'un groupe G.
On définit une sous-représentation linéaire de π, notée $\bigoplus_{i=1}^n \pi_i$, en posant

$$\bigoplus_{i=1}^n \pi_i : \left\{ \begin{array}{lcl} G & \rightarrow & U(\bigoplus_{i=1}^n V_{\pi_i}) \\ g & \mapsto & \bigoplus_{i=1}^n \pi_i(g) \end{array} \right.$$

où les notations $\oplus$ sont définies dans la définition 1.1.et $\bigoplus_{i=1}^n V_{\pi_i}$ est muni du produit scalaire

$$(.,.)_\pi : \left\{ \begin{array}{lcl} \left(\bigoplus_{i=1}^n V_{\pi_i}\right) \times \left(\bigoplus_{i=1}^n V_{\pi_i}\right) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ ((x_1 + .. + x_n),(y_1 + .. + y_n)) & \mapsto & \sum_{i=1}^n (x_i,y_i)_i \end{array} \right.$$

où $(.,.)_i$ désigne le prduit scalaire sur V_{π_i}.

Définition 2.6 (représentation irréductible)
On dit qu'une représentation unitaire π est irréductible si les seuls sous-espaces stables par tous les endomorphismes $(\pi(g))_{g\in G}$ sont $\{0\}$ et V_π.
En particulier, toute représentation de degré 1 de G est irréductible.

Définition 2.7 (opérateur d'entrelacement)
Soient π et π' deux représentations unitaires de G (non nécessairement de même degré).
On appelle opérateur d'entrelacement de π dans π', toute application linéaire de V_π dans $V_{\pi'}$ telle que

$$\forall g \in G, \quad T \circ \pi(g) = \pi'(g) \circ T. \tag{8}$$

On note $\mathrm{Hom}(\pi, \pi')$ l'ensemble des opérateurs d'entrelacement de π dans π'. Il s'agit bien entendu d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Remarque 2.3
Un opérateur d'entrelacement permet de "coréduire" (au sens de la rubrique **coréduction** page 3) la famille des endomorphismes $(\pi(g))_{g\in G}$, c'est-à-dire, que les matrices associées aux endomorphismes $(\pi(g))$ sont simultanément réduites aux matrices des endomorphismes $(\pi'(g))_{g\in G}$.
En général toute homothétie de V_π est un opérateur d'entrelacement de π dans π.

Définition 2.8 (représentations isomorphes)
Deux représentations unitaires π et π' son isomorphes ssi il existe au moins un opérateur d'entrelacement inversible T de π dans π', c'est-à-dire, il existe au moins un $T \in \mathcal{L}(V_\pi, V_{\pi'})$ inversible tel que

$$\forall g \in G, \quad \pi'(g) = T \circ \pi(g) \circ T^{-1}.$$

Un isomorphisme entre deux représentations unitaires est la donnée d'un opérateur d'entrelacement inversible entre ces deux représentations. Dans cas, on utilise la notation $\pi \cong \pi'$
Deux représentations unitaires π et π' sont non isomorphes ssi elles ne sont pas isomorphes (!), c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'opérateur d'entrelacement entre π et π'. Dans ce cas, on utilise la notation $\pi \ncong \pi'$

Définition 2.9 (dual unitaire d'un groupe)
Soit G un groupe fini. On introduit la relation $\mathcal{R}$ suir l'ensemble X_G des représentations unitaires de G qui est définie par

$$\pi \mathcal{R} \pi' \Leftrightarrow \pi \cong \pi'.$$

Si T est un isomorphisme de π dans π' alors T^{-1} est un isomorphisme de π' dans π. Si T est un isomorphisme de π dans π' et S un isomorphisme de π' dans π" alors $S \circ T$ est un isomorphisme de π dans π" (je laisse les vérification au lecteur).
On appelle dual unitaire l'ensemble $\Pi(G) = X_G/\mathcal{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles à isomorphisme près
Nous .

Définition 2.10 (Apparition d'une représentation dans une autre)
On dit qu'une représentation π apparait dans une représentation π' ssi il existe une sous-représentation π_W de π' qui est isomorphe à π.

Premiers résultats de la théorie des représentations linéaires

Théorème 2.1
Toute représentation unitaire de degré finie π de G est la somme directe orthogonale de sous-représentations unitaires irréductibles.

Preuve :
On procède par récurrence sur le degré de π (i.e. sur la dimension de V_π).
$(\mathcal{H}_n)$: toute représentation unitaire de degré n est la somme directe de représentations irréductibles.
$(\mathcal{H}_1)$ est vrai car le degré de π est 1 .donc les seuls sous-espaces vectoriels de V_π sont $\{0\}$ et V_π ce qui implique π

est irréductible.
Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie. Soit π une représentation unitaire de degré $n+1$. Si π est irréductible, c'est fini, sinon il existe un sous-espace vectoriel strict (différent de $\{0\}$ et de V_π) W de V_π stable par tous les $(\pi(g))_{g\in G}$. Le sous-espace $W^\perp$ est un sous-espace strict de V_π et il est stable par tous les $(\pi(g))_{g\in G}$ et $W^\perp$ Si l'on considère les deux sous-représentations unitaires $\pi' = \pi_W$ et $\pi" = \pi_{W^\perp}$ de π (cf. définition 2.4), on a les égalités suivantes

$$V_\pi = W \overset{\perp}{\bigoplus} W^\perp, \quad \forall x = x_W + x_{W^\perp} \in V_\pi, \forall g \in G, \quad \pi(g) = \pi_W(g)x_W + \pi_{W^\perp}(g)x_{W^\perp}.$$

autrement dit $\pi_W \overset{\perp}{\bigoplus} \pi_{W^\perp} = \pi(g)$ (cf. **??**) Le degré de π_W et $\pi_{W^\perp}$ est strictement plus petit que $n+1$ donc inférieur ou égal à n. Nous concluons en appliquant l'hypothèse de récurrence à π_W et à $\pi_{W^\perp}$ puis nous concluon
■

Remarque 2.4
Ce théorème montre que la connaissance de toutes les représentations irréductibles d'un groupe fini nous permet potentiellement de décrire l'ensemble des représentations de ce groupe. Elles jouent donc l'analogue des nombres premiers pour les nombres entiers. Nous verrons plus loin que l'on peut prolonger ce théorème en démontrant un théorème d'unicité de la décomposition d'une représentation unitaire en somme de représentations irréductibles unitaires (identiques à celle des nombres premiers, c'est à dire, à regroupement des termes identiques et à une permutations près, on a l'unicité du nombre d'apparition)

Proposition 2.1
1. *Si le groupe G est commutatif, l'ensemble des représentations unitaires irréductibles, à isomorphisme près, est constitué des représentations $(R_\chi)_{\chi\in\widehat{G}}$ (cf. 7) et $R_\chi \cong R_{\chi'}$ ssi $\chi = \chi'$, i.e. $\Pi(G)$ est en bijection avec $\widehat{G}$*
2. *L'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations unitaires irréductibles de degré 1 de G est en bijection avec le groupe des caractères de G.*
3. *Les représentations unitaires irréductibles d'un groupe fini G sont toutes de degré 1 ssi le groupe G est commutatif.*
4. *En général,* $\operatorname{card}\widehat{G} \leqslant \operatorname{card} G$ *et* $\operatorname{card}\widehat{G} = \operatorname{card} G$ *ssi G est commutatif.*

Preuve :

1. (a) Il est immédiat que les représentations $(R_\chi)_{\chi\in\widehat{G}}$ sont unitaires et irréductibles (les espaces E de dimension 1 ne possèdent comme sous-espaces que $\{0\}$ et E).
   (b) Si $R_\chi \cong R_{\chi'}$ alors il existe un isomorphisme T de R_χ dans $R_{\chi'}$, c'est-à-dire un isomorphisme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ tel que

$$\forall g \in G, \quad T \circ R_\chi(g) = R_{\chi'}(g) \circ T \Leftrightarrow \forall g \in G, \forall x \in \mathbb{C} \quad T(\chi(g)x) = \chi'(g)T(x)$$

   L'élement $\chi(g)$ est un nombre complexe et t est $\mathbb{C}$-linéaire donc

$$\forall g \in G, \forall x \in \mathbb{C} \quad \chi(g)T(x) = \chi'(g)T(x).$$

   On conclus que si $x \neq 0$, $T(x) \neq 0$ (T est un isomorphe de $\mathbb{C}$), ce qui nous donne $\forall g \in G, \quad \chi(g) = \chi'(g)$ c'est-à-dire $\chi = \chi'$
   (c) Soit π une représentation irréductible de G. Chaque endomorphisme $\pi(g)$ de V_π est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (il est unitaire), le groupe G est commutatif, donc les endomorphismes $(\pi(g))_{g\in G}$ commutent deux à deux.donc ils sont codiagonalisables. Soit x un vecteur propre commun. Le sous-espace $Vect(x)$ de V_π est stable par tous les $(\pi(g))_{g\in G}$ et π est irréductible donc $V_\pi = Vect(x)$. Pour tout $g \in G$, il existe $\lambda_g \in \mathbb{C}$ tel que $\pi(g)x = \lambda_g x$. Puisque π est unitaire, les valeurs propres de $\pi(g)$ sont de module 1 donc $\lambda_g \in S^1$. L'application $\lambda : g \mapsto \lambda_g$ est caractère :

$$\lambda_{gg'}.x = \pi(gg')x = \pi(g)\pi(g')x = \pi(g)[\lambda_{g'}x] = \lambda_{g'}\pi(g)x = \lambda_{g'}\lambda_g x.$$

   On conclut en remarquant que l'application $T : R_\lambda \to V_\pi$, définie par $T(t) = tx$ est un isomorphisme de $R_\lambda \to \pi$.

2. Soit π une représentation irréductible de degré 1 de G et $x \in V_\pi$ tel que $V_\pi = Vect(x)$. Pour tout $g \in G$, il existe un nombre complexe tel que $\pi(g)x = \lambda_g x$ ($\pi(g) \in V_\pi = Vect(x)$). Ce nombre complexe est de module 1 car l'endomorphisme $\pi(g)$ est unitaire. La relation $\pi(gg') = \pi(g)\pi(g')$ implique que $\lambda_{gg'} = \lambda_g \lambda_{g'}$ donc l'application $\lambda : g \mapsto \lambda_g$ est un caractère de G. L'opérateur $T_\pi : y = \alpha x \in V_\pi \mapsto \alpha$ est un opérateur inversible de V_π dans $\mathbb{C}$ qui est également un entrelacement de π dans R_χ car

   $$\forall g \in G, \forall y \in V_\pi, \quad [T_\pi \circ \pi(g)](y) = T_\pi(\pi(g))y = T_\pi(\chi(g)y) = T_\pi(\chi(g)\alpha x) = \chi(g)\alpha = \chi(g)T_\pi y = R_\chi(g)(T_\pi y)) = [R_\chi$$

   Ainsi π est isomorphe à R_χ et toute représentation π' isomorphe à π est isomorphe à R_χ (si T' est un isomorphisme de π' dans π alors $T_\pi \circ T'$ est un isomorphisme de π' dans R_χ). Remarquons en outre, que pour tout $x \in V_\pi$, on a

   $$\forall g \in G, \quad \chi(g) = T_\pi(\pi(g))$$

   où x est un générateur de V_π. L'application

   $$F : \begin{cases} \{\text{classe d'isomorphisme des représentations de degré 1 de } G\} & \rightarrow & \widehat{G} \\ \pi & \mapsto & (T_\pi(\pi(g)))_{g \in G} \end{cases}$$

   est bien définie. Elle est surjective car $F(R_\chi) = R_\chi$. Si $F(\pi) = \chi = R_\chi$, considérons $x \in V_\pi$ tel que $V_\pi = Vect(x)$. On a

   $$\forall g \in G, \forall y = \alpha x \in V_\pi, \quad \pi(g)y = \pi(g)(\alpha x) = \chi(g)(\alpha x) = \chi(g)y.$$

   L'application T_π est un isomorphisme de π dans R_χ donc $\pi \cong R_\chi$ donc la classe d'isomorphisme de π est R_χ ce qui démontre l'injectivité.

3. La réciproque a été traitée dans la partie précédente.
   Soit G un groupe dont toutes les représentations sont de degré 1. Considérons la représentation régulière gauche de G définie, rappelons le, par

   $$\forall u \in L^2(G) \text{ et } \forall h \in G, \; [R_g(g)u](h) = u(g^{-1}.h)$$

   où $L^2(G)$ est muni du produit scalaire

   $$(u, v)_{L^2(G)} = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g \in G} u(g)\overline{v(g)}$$

   pour lequel les opérateurs $\pi(g)$ sont tous unitaires. Le théorème 2.1 montre que

   $$R_g = \overset{\perp}{\bigoplus_i} R_g^{(i)} \tag{9}$$

   où les $R_g^{(i)}$ sont des sous-représentations de R_g irréductibles donc, d'après l'hypothèse, de degré 1. Les raisonnements du 1.c montre que pour tout entier i, il existe un caractère χ_i de G et un vecteur $x_i \in L^2(G)$ tel que $V_{R_g^{(i)}} = Vect(x_i)$ et $R_g^{(i)}(g)x_i = \chi_i(g)x_i$. Explicitons cette dernière formule :

   $$\forall h \in G, \forall g \in G, \quad \chi_i(g)x_i(h) = [R_g^{(i)}(g)x_i](h) = x_i(g^{-1}h).$$

   Ainsi notre vecteur x_i est une fonction sur G qui vérifie $x_i(g^{-1}h) = \chi_i(g)x_i(h)$ en remplaçant h par 1 et g par g^{-1} dans cette formule, on obtient que $\forall g \in G, \quad x_i(g) = x_i(1)\chi_i(g)$, c'est à dire que que $Vect(x_i) = Vect(\chi_i)$.La formule 9 montre que toute fonction sur G est la somme de caractères G. Soient $g, g' \in G$, notons $h = gg'$ et δ_h la masse de Dirac en h. Cette fonction est une combinaison linéaire des caractères χ_i pour lesquels $\chi_i(gg') = \chi(g'g)$. On en déduit par linéarité que $\delta_h(gg') = \delta_h(g'g)$, or $\delta_h(gg') = \delta_h(h) = 1$ ce qui implique que $\delta_h(g'g) = 1$ d'où $g'g = h = gg'$ et ce quelque que soit g, g' dans G. Le groupe G est commutatif.

4. Soit G un groupe fini et R_g sa représentation régulière gauche. Chaque caractère χ de G est une fonction de G dans $\mathbb{C}$ et l'espace $V(\chi) = Vect(\chi)$ est un sous-espace de dimension 1 de $L^2(G)$ stable par tous les $(R_g(g))_{g\in G}$.. Soit $x \in V(\chi)$ et $y \in V(\chi')$ avec $\chi \neq \chi'$. Fisons $g_0 \in G$ tel que $\chi(g_0) \neq \chi'(g_0)$, on a

$$\begin{aligned}(x,y)_{L^2(G)} &= (R_g(g_0)x, R_g(g_0)y)_{L^2(G)} = (\chi(g_0)x, \chi'(g_0)y)_{L^2(G)} \\ &= \chi(g_0)\overline{\chi'(g_0)}(x,y)_{L^2(G)} = [\chi(\chi')^{-1}](g_0)(x,y)_{L^2(G)} \\ &\Rightarrow \underbrace{(1-[\chi(\chi')^{-1}](g_0))}_{\neq 0}(x,y)_{L^2(G)} = 0 \Rightarrow (x,y)_{L^2(G)} = 0\end{aligned}$$

(cela ne rappelle pas de bons raisonnements sur les sous-espaces propres des endomorphismes). Les espaces $(V(\chi))_{\chi\in\widehat{G}}$ sont donc en somme directe orthogonale dans $L^2(G)$, ce qui montre l'inégalité suivante :

$$\operatorname{card}\widehat{G} = \sum_{\chi\in\widehat{G}} 1 = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \dim V(\chi) \leqslant \dim L^2(G) = \operatorname{card} G$$

Le cas d'égalité implique que $L^2(G) = \bigoplus_{\chi\in\widehat{G}} V(\chi)$ (argument classique sur les dimensions) donc $R_g = \bigoplus_{\chi\in\widehat{G}} (R_g)_{V(\chi)}$, chaque représentation $(R_g)_{V(\chi)}$ est irréductible de degré 1 ce qui permet d'appliquer le 2.

■

Remarque 2.5
Si le groupe G est commutatif, on retrouve que toute fonction de G dans $\mathbb{C}$ est une combinaison linéaire de caractères, que les caractères de G forment une base orthonormale pour cet espace (ils forment une base de co-diagonalisation en base orthonormale), ce qui fut la base de la théorie de Fourier sur G. Nous venons de voir la réciproque, si nous voulons définir une transformation de Fourier sur $L^2(G)$, c'est-à-dire décomposer toute fonction en une superposition de caractères, il est indispensable que le groupe G soit commutatif.
Quid d'une généralisation de la transformation de Fourier sur un groupe non commutatif ? Nous verrons sans la suite que l'on peut généraliser la transformation de Fourier, non plus en écrivant la fonction comme une superposition de caractères (qui sont associés aux représentations de degré 1) mais en l'écrivant comme une superposition de fonctions qui sont associées aux diverses représentation irréductible intervenant dans la représentation régulière droite : ces fonctions seront ce que l'on appelle des coefficients de représentations, c'està-dire la généralisation de la notion de coefficients de matrices

Le lemme de Schur

Lemme 2.2 (Lemme de Schur)
Soient π et π' deux représentations unitaires irréductibles.

1. $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}(V_\pi, V_{\pi'}) = 0$ *ssi* $\pi \ncong \pi'$. *c'est-à-dire tout opérateur d'entrelacement de π dans π' est nul.*
2. $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}(V_\pi, V_{\pi'}) = 1$ *ssi* $\pi \cong \pi'$, *c'est-à-dire qu'il existe un opérateur d'entrelacement T non nul de π dans π' et que tout opérateur d'entrelacement de π dans π' est un multiple de T.*
   En outre, tout opérateur d'entrelacement de π dans π' est un isomorphisme entre π et π'..

Preuve :
Considérons $T \in \operatorname{Hom}(V_\pi, V_{\pi'})$ un opérateur d'entrelacement de π dans π'. La formule 8 montre que $\ker T$ (resp. $T(V_\pi)$, l'image de T) est un sous-espace de V_π (resp. $V_{\pi'}$) stable par tous les $(\pi(g))_{g\in G}$ (resp. $(\pi'(g))_{g\in G}$). L'irréductibilité de π implique que $\ker T = V_\pi$ ou $\ker T = \{0\}$ et l'irréductibilité de π' montre que $T(V_\pi) = \{0\}$ ou $T(V_\pi) = V_{\pi'}$.
Si $\ker T = V_\pi$ ou $T(V_\pi) = \{0\}$, alors on a immédiatement $T = 0$.
Sinon $\ker T = \{0\}$ ou $T(V_\pi) = V_{\pi'}$. Dans les cas, l'utilisation du théorème du rang montrer que $\ker T = \{0\}$ et $T(V_\pi) = V_{\pi'}$ donc T réalise une bijection de V_π dans $V_{\pi'}$.
Soit $T' \in \operatorname{Hom}(V_\pi, V_{\pi'})$, l'application $T^{-1}\circ T'$ est un endomorphisme de V_π qui entrelace π avec elle-même car, on a pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned}[T^{-1}\circ T']\circ\pi(g) &= T^{-1}[T'\circ\pi(g)] = T^{-1}\circ[\pi'(g)\circ T'] = [T^{-1}\circ\pi'(g)]\circ T \\ &= [\pi(g)\circ T^{-1}]\circ T' = \pi(g)\circ[T^{-1}\circ T'].\end{aligned}$$

L'endomorphisme $T^{-1} \circ T'$possède une valeur propre complexe λ, l'endomorphisme $T^{-1} \circ T' - \lambda Id$ est non inversible et c'est un opérateur d'entrelacement de π. Ainsi le sous-espace $\ker(T^{-1} \circ T' - \lambda Id)$ est un sous-espace non nul de V_π qui est stable par tous les $(\pi(g))_{g \in G}$, l'irréductibilité de π implique que $\ker(T^{-1} \circ T' - \lambda Id) = V_\pi$ c'est-à-dire que $T^{-1} \circ T' = \lambda Id \Rightarrow T' = \lambda T$.
De ces raisonnements, on en déduit :

1. si $\dim_{\mathbb{C}}$ $\mathrm{Hom}(V_\pi, V_{\pi'}) = 0$ alors le seul opérateur d'entrelacement de π dans π' est l'opérateur nul donc π et π' ne peuvent être isomorphes.
   Réciproquement, supposonsi π et π' ne sont pas isomorphes. Soit T un opérateur d'entrelacement de π dans π'. Si $T \neq 0$, les raisonnements précédents montre que T est un isomorphisme de V_π dans $V_{\pi'}$, ce qui est absurdre.
2. Si $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(V_\pi, V_{\pi'}) = 1$ alors il existe un opérateur d'entrelacement non nul de π dans π' donc T est un isomorphisme de V_π dans $V_{\pi'}$.
   Réciproquement, si π et π' sont isomorphes. Soit T un tel isomorphisme, alors $T' = \lambda T$. donc $\mathrm{Hom}(V_\pi, V_{\pi'}) = Vect(T)$ et $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(V_\pi, V_{\pi'}) = 1$.

■

Remarque 2.6
Ce lemme sera un élément fondamental dans l'étude des représentations linéaires. Il le point central des preuves des principaux résultats de la théorie des représentations. Son extension aux cas des groupes non finis trivialisera de très nombreux calculs d'intégrales !

Corollaire 2.1
Si π et π' sont deux représentations unitaires isomorphes, on peut chosir un élément T unitaire, c'est-à-dire $TT^* = Id_{V_{\pi'}}$ et $T^*T = Id_{V_\pi}$, tel que $\mathrm{Hom}(V_\pi, V_{\pi'}) = Vect(T)$

Preuve :
Faisons un premier rappel d'algèbre linéaire. Si T est une application de $(V_\pi, (.,.)_\pi)$ dans $(V_{\pi'}, (.,.)_{\pi'})$, on définit son adjoint T^* comme étant l'unique application linéaire de$V_{\pi'}$ dans V_π telle que :

$$\forall x \in V_\pi, \forall y \in V_{\pi'}, \quad (Tx, y)_{\pi'} = (x, T^*y)_\pi.$$

Il est immédiat que l'adjoint de Id_{V_π} est $Id_{V_{\pi'}}$. En outre, on a la formule classique $(TS)^* = S^*T^*$.
Soit T un générateur de $\mathrm{Hom}(V_\pi, V_{\pi'})$ (i.e. $\mathrm{Hom}(V_\pi, V_{\pi'}) = Vect(T)$). T est un entrelacement inversible de π dans π', donc

$$\forall g \in G, \quad T \circ \pi(g) = \pi'(g) \circ T,$$

par adjonction, on obtient

$$\forall g \in G, \quad \pi(g)^* \circ T^* = T^* \circ \pi'(g)^*$$

puis, les représentations π et π' étant unitaires, on a

$$\forall g \in G, \quad \pi(g)^{-1} \circ T^* = T^* \circ \pi'(g)^{-1} \Leftrightarrow T^* \circ \pi'(g) = \pi(g) \circ T^*$$

L'endomorphisme T^*T de V_π est un opérateur d'entrelacement de π dans π car

$$\forall g \in G, \quad (T^* \circ T) \circ \pi(g) = T^* \circ (T \circ \pi(g)) = T^* \circ (\pi'(g) \circ T) = (T^* \circ \pi'(g)) \circ T = (\pi(g) \circ T^*) \circ T = \pi(g) \circ (T^* \circ T).$$

Le lemme de Schur montre que T^*T est une homothétie de V_π de rapport un certain complexe λ. L'endomorphisme T^*T est inversible (composé d'inversible) et positif ($(T^*Tx, x)_\pi = (Tx, Tx)_{\pi'} \geqslant 0$) donc $\lambda \in \mathbb{R}_+^\times$. Si l'on pose $T' = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} T$, T' est un opérateur d'entrelacement inversible de π dans π' donc $\mathrm{Hom}(V_\pi, V_{\pi'}) = Vect(T')$ et $T'^* \circ T' = Id_{V_\pi}$ (par construction) d'où, $(T')^* = (T')^{-1}$ donc $T' \circ (T')^* = (T') \circ (T')^{-1} = Id_{V_{\pi'}}$ ■

Remarque 2.7
Il est naturel de se poser le problème de l'existence d'un opérateur d'entrelacement unitaire entre deux représentations isomorphes. En effet, réinterprétons les représentations unitaires irréductibles π et π' : on peut les voir comme étant

respectivement des familles $\mathcal{A} = \{A_i\}_i$ et $\mathcal{B} = \{B_i\}$ de matrices unitaires ne possédant chacune aucun sous-espace stable commun Ces représentations sont isomorphes est équivalent à l'existence d'un opérateur d'entrelacement T inversible tel que

$$\forall g \in G, \quad T \circ \pi'(g) = \pi(g) \circ T,$$

ce que l'on peut réinterpréter par l'existence d'une matrice C inversible tel que

$$\forall i, \quad B_i = CA_iC^{-1}.$$

Les matrices A_i et B_i étant unitaires, il est naturel (au sens de l'algèbre linéaire) de trouver une telle matrice C unitaire, c'est-à-dire que l'opérateur d'entrelacement soit unitaire.

3 Caractère d'une representation

Coefficients d'une représentation

Le lemme de Schur nous montre qu'il ne peut exister plus d'un opérateur d'entrelacement entre deux représentations irréductibles, mais il ne nous fourni pas actuellement la construction explicite d'un tel opérateur d'entrelacement. Nous disposons de deux représentations irréductibles π et π' et nous souhaitons contruire un opérateur d'entrelacement de π dans π, c'est-à-dire, déterminer une application linéaire de V_π dans $V_{\pi'}$ tel que

$$\forall g \in G, \quad T \circ \pi'(g) = \pi(g) \circ T.$$

Une première question d'algèbre linéaire nous viens à l'esprit : nous disposons de deux espaces vectoriels hermitiens $(E, (.,.)_E)$ et $(F, (.,.)_F)$, comment construire une application linéaire (non nul à priori) de E dans F. Si nous fixons un vecteur $x_1 \in E$ et un vecteur $y_1 \in F$, l'application

$$x \mapsto (x, x_1)_E . y_1$$

nous convient parfaitement (il s'agit en fait du prototype des applications linéaires de rang 1 de E dans F et toute application linéaire est somme d'applications linéaires de rang 1).

Si nous disposons en outre, d'un automorphisme g de E et d'un automorphisme h de F, on peut également considérer des applications de la forme

$$x \mapsto (g(x), x_1)_E . h(y_1),$$

et puisque nous disposons d'un groupe d'automorphismes, on considère la sommation de telle expressions sur le groupe.

Il est intéressant, pour finir, de remarquer que pour un endomorphisme g de E qui est muni d'une base orthonormale (e_i), le terme $(u(e_i), e_j)$ est le coefficient (i, j)de la matrice de u dans cette base.

Définition 3.1
Soit π une représentation unitaire de G et ϕ^π un vecteur de V_π. Posons

$$\forall g \in G, \quad \phi^\pi_g = \pi(g)\phi^\pi. \tag{10}$$

Si $u, v \in V_\pi$, on appelle coefficient de la représentation π, la fonction de $L^2(G)$ définie par

$$g \mapsto (\pi(g)u, v)_{V_\pi} \tag{11}$$

Proposition 3.1
Soient π, π' deux représentations unitaire irréductibles de G et $\phi^\pi, \psi^{\pi'}$ deux vecteurs respectivement de V_π et $V_{\pi'}$. Les espaces vectoriels V_π et $V_{\pi'}$ sont munis respectivement des produits scalaires $(.,.)_\pi$ et $(.,.)_{\pi'}$ pour lesquels les endomorphismes respectivement $(\pi(g))_{g\in G}$ et $\pi'(g))_{g\in G}$ sont unitaires.
On considère l''application linéaire $H^{\pi,\pi'}_{\phi,\psi}$ de V_π dans $V_{\pi'}$ définie par

$$\forall u \in V_\pi, \quad H^{\pi,\pi'}_{\phi,\psi} u = \sum_{g\in G} (u, \phi^\pi_g)_\pi \psi^{\pi'}_g. \tag{12}$$

1. *L'application* $H_{\phi,\psi}^{\pi,\pi'}$ *est un opérateur d'entrelacement de* π *dans* π'. *En particulier* $H_{\phi,\psi}^{\pi,\pi'} = 0$ *si* $\pi \not\cong \pi'$
2. *Supposons que* $\pi \cong \pi'$. *Soit* T *un opérateur d'entrelacement unitaire de* π *dans* π' *(cf. corollaire 2.1) Alors* $\operatorname{tr} T \neq 0$ *et on a l'égalité remarquable*

$$H_{\phi,\psi}^{\pi,\pi'} = \frac{\operatorname{card} G}{\operatorname{tr} T}(\psi, T\phi)_{\pi'} T$$

En particulier, si $\pi = \pi'$, *alors*

$$H_{\phi,\psi}^{\pi,\pi} = \frac{\operatorname{card} G}{d_\pi}(\psi, \phi)_\pi Id_{V_\pi}$$

3. *Pour tous* $u \in V_\pi, v \in V_{\pi'}$, *on a*

$$\sum_{g\in G}(u, \phi_g^\pi)_\pi(\psi_g^{\pi'}, v)_{\pi'} = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{card} G}{\operatorname{tr} T}(Tu, v)_{\pi'}(\psi, T\phi)_{\pi'} & si \quad \pi \cong \pi' \\ 0 & si \quad \pi \not\cong \pi' \end{cases} \tag{13}$$

En particulier, pour tous $u, v \in V_\pi$

$$\sum_{g\in G}(u, \phi_g^\pi)_\pi \overline{(v, \psi_g^\pi)_\pi} = \frac{\operatorname{card} G}{d_\pi}(u, v)_\pi \overline{(\phi, \psi)_\pi} \tag{14}$$

Preuve :
La formule $\pi(h)\phi_g = \phi_{hg}$ montre que le sous-espace vectoriel W de V_π défini par $W = Vect(\phi_g, g \in G)$ est stable par tous les $(\pi(g))_{g\in G}$. Puisque $\pi(1)\phi = \phi \neq 0 \in W$, le sous-espace W est non nul et l'irréductibilité montre que $W = V_\pi$.

1. Pour tout $h \in G$ et tout $u \in V_\pi$, on a

$$\begin{aligned}
[\pi'(h) \circ H_{\phi,\psi}^{\pi,\pi'}]u &= \pi'(h)(\sum_{g\in G}(u, \phi_g^\pi)_\pi \psi_g^{\pi'}) = \sum_{g\in G}(u, \phi_g^\pi)_\pi \pi'(h)\psi_g^{\pi'} \underset{\text{(cf. 10)}}{=} \sum_{g\in G}(u, \phi_g^\pi)_\pi \psi_{hg}^{\pi'} \underset{g\leftarrow hg}{=} \sum_{g\in G}(u, \phi_{h^{-1}g}^\pi)_\pi \psi_g^{\pi'} \\
&= \sum_{g\in G}(u, \pi(h)^{-1}\phi_g^\pi)_\pi \psi_g^{\pi'} = \sum_{g\in G}({}^t\pi(h)^{-1}u, \phi_g^\pi)_\pi \psi_g^{\pi'} \underset{\pi(h)\in U(V_\pi)}{=} \sum_{g\in G}(\pi(h)u, \phi_g^\pi)_\pi \psi_g^{\pi'} \\
&= H_{\phi,\psi}^{\pi,\pi'}(\pi(h)u) = [H_{\phi,\psi}^{\pi,\pi'} \circ \pi(h)]u
\end{aligned}$$

L'application linéaire $H_{\phi,\psi}^{\pi,\pi'}$ de V_π dans $V_{\pi'}$ est donc un opérateur d'entrelacement de π dans π'. Le lemme de Schur (2.2) montrer que $H_{\phi,\psi}^{\pi,\pi'} = 0$ si $\pi \not\cong \pi'$

2. On suppose $\pi \cong \pi'$. Le lemme de Schur (2.2) et le corollaire 2.1 montre que

$$H_{\phi,\psi}^{\pi,\pi'} = \lambda_{\phi,\psi}^{\pi,\pi'} T \quad \text{où } \lambda_{\phi,\psi}^{\pi,\pi'} \in \mathbb{C} \text{ et } T \text{ est un opérateur d'entrelacement de } \pi \text{ dans } \pi' \text{ unitaire}$$

Nous allons déterminons cette constante $\lambda_{\phi,\psi}^{\pi,\pi'}$ en utilisant la trace (en remarquant bien entendu, que $\dim V_\pi = \dim V_{\pi'}$ car T est un isomorphisme). Immédiatement, on a :

$$\operatorname{tr}(H_{\phi,\psi}^{\pi,\pi'}) = \lambda_{\phi,\psi}^{\pi,\pi'} \operatorname{tr} T. \tag{15}$$

Rappellons que si A est la matrice d'une application linéaire u de E (muni d'une base orthonormale (e_i)) dans F (muni d'une case orthonormale (f_i)), alors le coefficient $a_{i,j}$ de A est donné par

$$a_{i,j} = (u(e_i), f_j)_F$$

où $(.,.)_F$ désigne le produit scalaire sur F. En particulier, si $\dim E = \dim F$, la trace est donnée par

$$\operatorname{tr} u = \operatorname{tr} A = \sum_i (u(e_i), f_i)_F$$

Nous appliquons cette dernière formule à l'application linéaire $H^{\pi,\pi'}_{\phi,\psi}$. On choisit une base orthonormale de V_π, $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant d_\pi}$. L'opérateur T étant une isométrie de V_π dans $V_{\pi'}$, il transforme une base orthonormale en base orthonormale, ce qui nous permet de choisir comme base orthonormale de $V_{\pi'}$, la famille $(Te_i)_{1\leqslant i\leqslant d_{\pi'}}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(H^{\pi,\pi'}_{\phi,\psi}) &= \sum_{i=1}^{d_\pi}(H^{\pi,\pi'}_{\phi,\psi}e_i, Te_i)_{\pi'} = \sum_{i=1}^{d_\pi}\sum_{g\in G}(e_i,\pi(g)\phi)_\pi(\pi'(g)\psi, Te_i)_{\pi'} && (16)\\
&= \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{d_\pi}(e_i,\pi(g)\phi)_\pi(\pi'(g)\psi, Te_i)_{\pi'} = \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{d_\pi}\overline{(\pi(g)\phi, e_i)_\pi}(\pi'(g)\psi, Te_i)_{\pi'} && (17)
\end{aligned}$$

La bases (Te_i) étant orthonormale, on a $\forall y\in V_{\pi'},\quad y=\sum_{i=1}^{d_\pi}(y,Te_i)_{\pi'}Te_i$. En scalairisant à droite par Tx puis en utilisant l'unitarité de T, on obtient

$$(y,Tx)_{\pi'} = \sum_{i=1}^{d_\pi}(y,Te_i)_{\pi'}(Te_i,Tx)_{\pi'} = \sum_{i=1}^{d_\pi}(y,Te_i)_{\pi'}(e_i,x)_\pi = \sum_{i=1}^{d_\pi}(y,Te_i)_{\pi'}\overline{(x,e_i)_\pi}. \tag{18}$$

En appliquant la formule 18 à $x=\pi(g)\phi$ et $y=\pi'(g)\psi$ et la formule 16, on en déduit la formule

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(H^{\pi,\pi'}_{\phi,\psi}) &= \sum_{g\in G}(\pi'(g)\psi, T\pi(g)\phi)_{\pi'} \underset{T\in\mathrm{Hom}(V_\pi,V_{\pi'})}{=} \sum_{g\in G}(\pi'(g)\psi,\pi'(g)T\phi)_{\pi'} \underset{\pi'(h)\in U(V_{\pi'})}{=} \sum_{g\in G}(\psi,T\phi)_{\pi'}\\
&= \operatorname{card} G\times(\psi,T\phi)_{\pi'} && (19)
\end{aligned}$$

La formule 15 combinée à la formule 19 montre que la constante $\lambda^{\pi,\pi'}_{\phi,\psi}$ vérifie

$$\operatorname{tr}T\times\lambda^{\pi,\pi'}_{\phi,\psi} = \operatorname{card}G\times(\psi,T\phi)_{\pi'}$$

Par conséquent si $\operatorname{tr}T=0$ alors $(\psi,T\phi)_{\pi'}=0$ pour tout $\phi\in V_\pi$ et tout $\psi\in V_{\pi'}$. l'application T est une isométrie de V_π sur $V_{\pi'}$, donc

$$\begin{aligned}
\forall\psi &\in V_{\pi'},\quad 0=(\psi,T(T^*\psi))_{\pi'}=(T^*\psi,T^*\psi)_{\pi'}=\|T^*\psi\|^2_{\pi'}\\
&\Rightarrow \forall\psi\in V_{\pi'},\quad T^*\psi=0\Rightarrow\forall\psi\in V_{\pi'},\quad \psi=0\,!
\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{tr}T\neq 0$ et on a

$$\lambda^{\pi,\pi'}_{\phi,\psi} = \frac{\operatorname{card}G}{\operatorname{tr}T}(\psi,T\phi)_{\pi'}$$

ce qui nous fourni la première égalité annoncée.
La seconde en découle immédiatement en remarquant que Id_{V_π} est un opérateur d'entrelacement unitaire de π dans π et que $\operatorname{tr}Id_{V_\pi}=\dim V_\pi=d_\pi$.

3. D'une part, les deux premières parties de la proposition montre que

$$(H^{\pi,\pi}_{\phi,\psi}u,v)_{\pi'} = \begin{cases}
(\frac{\operatorname{card}G}{\operatorname{tr}T}\overline{(T\phi,\psi,)_{\pi'}}\times Tu,v)_{\pi'} & \text{si}\quad \pi\cong\pi'\\
(\frac{\operatorname{card}G}{\operatorname{tr}T}\overline{(T\phi,\psi,)_{\pi'}}\times u,v)_{\pi'} & \text{si}\quad \pi=\pi'\\
(0\times u,v)_{\pi'} & \text{si}\quad \pi\ncong\pi'
\end{cases}$$

d'autre part, la formule 12 montre que

$$(H^{\pi,\pi}_{\phi,\psi}u,v)_{\pi'} = \sum_{g\in G}(u,\phi^\pi_g)(\psi^{\pi'}_g,v) = \sum_{g\in G}(u,\phi^\pi_g)_\pi\overline{(v,\psi^\pi_g)_\pi}$$

ce qui permet de conclure.

■

Représentations irréductibles et sous-représentations de R_d

Considérons maintenant une représentation unitaire π de G (pas nécessairement irréductible). Soient u, v deux vecteurs de V_π. Fixons v et considérons l'application T de V_π dans $L^2(G)$ définie par

$$(Tu)(g) = (\pi(g)u, v)_{V_\pi} = (u_g, v)_\pi.$$

La substitution de u par $\pi(g')u$, nous fournit les formules suivantes :

$$\begin{gathered} \forall u \in V_\pi, \forall g, g' \in G, \\ (T\pi(g')u)(g) = (\pi(g)\pi(g')u, v)_{V_\pi} = (\pi(gg')u, v)_{V_\pi} = (Tu)(gg') \\ \Leftrightarrow \forall u \in V_\pi, \forall g' \in G, \quad [T \circ \pi(g')]u = [R_d(g') \circ T]u, \end{gathered}$$

ce que l'on peut traduire par

$$\forall g' \in G, \quad T \circ \pi(g') = T \circ R_d(g')$$

Notre bel opérateur T est donc un opérateur d'entrelacement entre une représentation abstraite π et la représentation R_d qui est beaucoup agréable, explicite et maniable.
L'image de V_π par T est une sous-espace vectoriel de $L^2(G)$ stable par R_d : en effet, si $y \in T(V_\pi)$, il existe $x \in V_\pi$ tel que $y = Tx$

$$\forall g \in G, \quad R_d(g)x = R_d(g)(Tx) = (R_d(g) \circ T)x = (T \circ \pi(g))x = T(\underbrace{\pi(g)x}_{\in V_\pi}) \in T(V_\pi),$$

donc $(R_d)_{T(V_\pi)}$ est une sous-représentation de R_d. Supposons que nous avons choisi pour v un vecteur non nul (!), donc

$$(Tv)(1) = (\pi(1)v, v)_{V_\pi}) = (v, v)_{V_\pi} > 0$$

ce qui implique que T est non nul.et $T(V_\pi)$ est un sous-espace non réduit à $\{0\}$ de $L^2(G)$ invariant par la représentation R_d. La représentation $(R_d)_{T(V_\pi)}$ se décompose en une somme de sous-représentations irréductibles (π_i). Considérons une sous-représentation π_i de $(R_d)_{T(V_\pi)}$. L'espace V_{π_i} est non nul donc le sous-espace $T^{-1}(V_{\pi_i}) = \{y \in V_\pi \text{ tel que } Ty \in V_{\pi_i}\}$ est non nul. Je laisse le soin au lecteur que $T^{-1}(V_{\pi_i})$ est stable sous la représentation π, qui est irréductible donc $T^{-1}(V_{\pi_i}) = V_\pi$, c'est-à-dire que $T(V_\pi) \subset V_{\pi_i}$. La représentation π_i étant une sous-représentation de R_d et T étant un entrelacement de π dans R_d, l'opérateur T est un entrelacement non nul de la représentation irréductible π dans la représentation irréductible π_i donc $\mathrm{Hom}(V_\pi, V_{\pi'}) \neq \{0\}$. Le lemme de Schur nous montre que T est un isomorphisme de π dans π' et que $\pi \cong \pi_i$. Nous venons d'obtenir que notre représentation abstraite π est isomorphe à une sous-représentation de la représentation régulière droite de G. Ceci a deux conséquences :

1. la classification des représentations irréductibles est équivalente à la classification des sous-représentations irréductibles de la représentation régulière droite de G (une représentation irréductible de G apparait, à un isomorphisme près, comme une sous-représentation irréductible de R_d et toute sous-représentation irréductible de R_d est une représentation irréductible de G)
2. La représentation R_d de G se décompose en une somme directe de sous-représentations irréductibles, i.e.,

   $$R_d = \bigoplus_i \pi_i.$$

   En particulier, on a la décomposition suivante de $L^2(G)$

   $$L^2(G) = \bigoplus_i V_{\pi_i},$$

   qui conduit à l'égalité

   $$\operatorname{card} G = \dim L^2(G) = \sum_i \dim V_{\pi_\pi} = \sum_i d_{\pi_i}.$$

   Bien entendu, $d_{\pi_i} \geqslant 1$, $\forall i$. Soit $\pi \in \Pi(G)$, on note a_π le nombre de sous-représentations π_i de R_d qui sont isomorphes à π. Nous avons vu que toute représentation irréductible est isomorphe à une sous-représentation irréductible de R_d donc $a_\pi \geqslant 1, \quad \forall \pi \in \Pi(G)$. Dans la somme précédente, on regroupe les termes correspondants à des représentations isomorphes et en, remarquant que $d_\pi = d_{\pi_i}$ lorsque $\pi_i \cong \pi$, on obtient l'inégalité suivante

$$\operatorname{card} G = \sum_{\pi \in \Pi(G)} a_\pi d_\pi \geqslant \sum_{\pi \in \Pi(G)} 1 = \operatorname{card} \Pi(G)$$

ce que nous résumons par le théorème suivant

Théorème 3.1

1. *Toute représentation irréductible de G est isomorphe à une sous-représentation de la représentation régulière droite de G.*
2. $\operatorname{card} \Pi(G) \leqslant \operatorname{card} G$

Caractère d'une représentation

La proposition 3.1 nous a fourni un critère suffisant de non isomorphisme entre deux représentations irréductibles π et π'. Nous souhaitons néanmoins découvrit une condition nécessaire et suffisante pour caractériser deux représentations isomorphes.. Si les deux représentations π et π' sont isomorphes alors il existe un isomorphisme T de π dans π' tel que

$$\forall g \in G, \quad \pi(g) = T^{-1} \circ \pi(g) \circ T.$$

En particulier, puisque les représentations sont de dimension finie, les endomorphismes $\pi(g)$ possède une trace (qui est un nombre complexe) et on a

$$\forall g \in G, \quad \operatorname{tr} \pi(g) = \operatorname{tr} \pi'(g).$$

Ainsi, si deux représentations sont isomorphes les fonctions de $L^2(G)$ $\chi_\pi : g \mapsto \operatorname{tr} \pi(g)$ et $\chi_{\pi'} : g \mapsto \operatorname{tr} \pi'(g)$ sont égales. La réciproque est-elle vraie ?

Fixons une base orthonormale $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant d_\pi}$ de V_π. La trace de $\pi(g)$ est donnée par

$$\operatorname{tr} \pi(g) = \sum_{i=1}^{d_\pi} (\pi(g) e_i, e_i).$$

donc

$$\forall g \in G, \quad \chi_\pi(g) = \sum_{i=1}^{d_\pi} (\pi(g) e_i, e_i) \tag{20}$$

Considérons une base orthonormale $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant d_{\pi'}}$ de $V_{\pi'}$, on a

$$\forall g \in G, \quad \chi_{\pi'}(g) = \sum_{j=1}^{d_{\pi'}} (\pi'(g) f_j, f_j) \tag{21}$$

Appliquons la formule 13 à $u = \phi = e_i$ et $v = \psi = f_j$:

$$\forall i \in \{1, .., d_\pi\}, \forall j \in \{1, .., d_{\pi'}\}, \quad \sum_{g \in G} (e_i, (e_i)_g^\pi)_\pi ((f_j)_g^{\pi'}, f_j)_{\pi'} = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{card} G}{\operatorname{tr} T} (Te_i, f_j)_{\pi'} (f_j, Te_i)_{\pi'} & \text{si} \quad \pi \cong \pi' \\ 0 & \text{si} \quad \pi \not\cong \pi' \end{cases}$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\begin{aligned} \forall i \quad \in \quad & \{1, .., d_\pi\}, \forall j \in \{1, .., d_{\pi'}\}, \quad \sum_{g \in G} ((f_j)_g^{\pi'}, f_j)_{\pi'} \overline{((e_i)_g^\pi, e_i)_\pi} \\ = \quad & \begin{cases} \dfrac{\operatorname{card} G}{\operatorname{tr} T} (Te_i, f_j)_{\pi'} (Te_i, f_j)_{\pi'} = \dfrac{\operatorname{card} G}{\operatorname{tr} T} \left| (Te_i, f_j)_{\pi'} \right|^2 & \text{si} \quad \pi \cong \pi' \\ 0 & \text{si} \quad \pi \not\cong \pi' \end{cases} . \end{aligned}$$

où T est un opérateur d'entrelacement de π dans π' que l'on peut, en outre, supposer unitaire (corollaire 2.1). Si nous sommons ces égalités relativement à i et j, nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{d_\pi}\sum_{j=1}^{d_{\pi'}}\sum_{g\in G}((f_j)_g^{\pi'}, f_j)_{\pi'}\overline{((e_i)_g^{\pi}, e_i)_\pi} = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{card} G}{\operatorname{tr} T}\sum\limits_{i=1}^{d_\pi}\sum\limits_{j=1}^{d_{\pi'}} |(Te_i, f_j)_{\pi'}|^2 & \text{si} \quad \pi \cong \pi' \\ 0 & \text{si} \quad \pi \ncong \pi' \end{cases}$$

Nous permutons ensuite les symboles de sommation et nous utilisons les formules 20 et 21, ce qui nous donnent

$$\sum_{g\in G}\chi_{\pi'}(g)\overline{\chi_\pi(g)} = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{card} G}{\operatorname{tr} T}\sum\limits_{i=1}^{d_\pi}\sum\limits_{j=1}^{d_{\pi'}} |(Te_i, f_j)_{\pi'}|^2 & \text{si} \quad \pi \cong \pi' \\ 0 & \text{si} \quad \pi \ncong \pi' \end{cases}$$

Le produit scalaire sur $L^2(G)$ étant défini par la formule 1, nous obtenons

$$(\chi_{\pi'}, \chi_\pi) = \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{d_\pi}\sum\limits_{j=1}^{d_{\pi'}} |(Te_i, f_j)_{\pi'}|^2}{\operatorname{tr} T} & \text{si} \quad \pi \cong \pi' \\ 0 & \text{si} \quad \pi \ncong \pi' \end{cases}.$$

Nous constatons donc que les fonctions χ_π et $\chi_{\pi'}$ sont orthogonales si $\pi \ncong \pi'$, en particulier, elles ne peuvent égales, ce qui démontre la réciproque. En fait, nous avons obtenu beaucoup mieux que cela. Nous savons que les fonctions χ_π et $\chi_{\pi'}$ sont orthogonales dans $L^2(G)$ si $\pi \ncong \pi'$. Si $\pi \cong \pi'$, on sait que les fonctions χ_π et $\chi_{\pi'}$ sont égales donc le calcul de $(\chi_{\pi'}, \chi_\pi)_{L^2(G)}$ est identique au calcul de $(\chi_\pi, \chi_\pi)_{L^2(G)}$. Nous pouvons choisir comme opérateur d'entrelacement unitaire l'identité de V_π dont la trace est $\dim V_\pi = d_\pi$, d'où l'égalité

$$(\chi_\pi, \chi_\pi) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{d_\pi}\sum\limits_{j=1}^{d_\pi} |(e_i, e_j)_\pi|^2}{d_\pi} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{d_\pi}\sum\limits_{j=1}^{d_\pi} \delta_i^j}{d_\pi} = \frac{1}{d_\pi}.$$

Nous en déduisons que

$$(\chi_{\pi'}, \chi_\pi) = \begin{cases} \dfrac{1}{d_\pi} > 0 & \text{si} \quad \pi \cong \pi' \\ 0 & \text{si} \quad \pi \ncong \pi' \end{cases}.$$

Ainsi les fonctions $(\frac{1}{\sqrt{d_\pi}}\chi_\pi)_{\pi\in\Pi(G)}$ forment une famille orthonormale de $L^2(G)$. Si χ est un caractère de G alors la représentation R_χ est irréductible de degré 1 et son caractère (en tant que représentation) est ..χ.

Définition 3.2
Soit π une représentation irréductible de G. On appelle caractère de π la fonction χ_π de $L^2(G)$ définie par

$$\forall g \in G, \quad \chi_\pi(g) = \operatorname{tr} \pi(g).$$

Théorème 3.2 (orthogonalité des caractères)

1. *Les fonctions $(\frac{1}{\sqrt{d_\pi}}\chi_\pi)_{\pi\in\Pi(G)}$ forment une famille orthonormale de $L^2(G)$.*
   En particulier, les caractères $(\chi)_{\chi\in\widehat{G}}$ de G forment une famille orthogonales de $L^2(G)$.
2. *Deux représentations unitaires irréductibles π et π' sont isomorphes ssi $\chi_\pi = \chi_{\pi'}$*

Lemme 3.1
Soient (π_i) une famille de sous-représentations d'une représentation unitaire π. Alors, on a :

$$\chi_{\bigoplus\limits_i \pi_i} = \sum_i \chi_{\pi_i}$$

Preuve :
Cela découle simplement de a formule 2 appliqué à l'opérateur $\bigoplus_i \pi_i(g)$. ■

Corollaire 3.1

1. *Soient π' une représentation unitaire irréductible de G et π une représentation unitaire de G.*
Le nombre de sous-représentations irréductibles de π isomorphes à π' est le nombre entier $< \chi_\pi, \chi_{\pi'} >_{L^2(G)}$.
En particulier, une représentation unitaire irréductible π' apparait dans une représentation unitaire π ssi $< \chi_\pi, \chi_{\pi'} >\neq 0$.
2. *deux représentations π et π' (pas nécessairement irréductibles) sont isomorphes ssi $\chi_\pi = \chi_{\pi'}$.*
3. *Une représentation unitaire π est irréductible ssi $< \chi_\pi, \chi_\pi >_{L^2(G)}= 1$*

Preuve :

1. La représentation π se décompose en une somme de sous-représentations π_i irréductibles. Le lemme 3.1 montre que
$$\chi_\pi = \sum_i \chi_{\pi_i}.$$
Donc
$$< \chi_\pi, \chi_{\pi'} >_{L^2(G)}= \sum_i < \chi_{\pi_i}, \chi_{\pi'} >_{L^2(G)}= \sum_i \delta_{\pi_i}^{\pi'}$$
où $\delta_{\pi_i}^{\pi'} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \pi_i \cong \pi' \\ 0 & \text{si} \quad \pi_i \not\cong \pi' \end{cases}$. Donc le produit scalaire $< \chi_\pi, \chi_{\pi'} >_{L^2(G)}$ est égale au nombre de sous-représentations π_i de π qui sont isomorphes à π'.
2. Si les deux représentations π et π' sont isomorphes, leurs caractères sont égaux et la fonction χ_π.n'est pas nulle ($\chi_\pi(1) = \operatorname{tr}\pi(1) = \operatorname{tr} Id_{V_\pi} = d_\pi > 0$) donc le produit scalaire $< \chi_\pi, \chi_{\pi'} >$ n'est pas nul.
Réciproquement, si $\chi_\pi = \chi_{\pi'}$ alors
$$\forall \pi_i \in \Pi(G), \quad < \chi_{\pi_i}, \chi_\pi >_{L^2(G)}=< \chi_{\pi_i}, \chi_{\pi'} >_{L^2(G)}.$$
Quelque soit la représentation irréductible $\pi_i \in \Pi(G)$, le nombre de fois où apparait π_i dans π et dans π' est le même. Il suffit de vérifier que si nous disposons de deux familles $(R_i)_{i\in I}$ et $(S_i)_{i\in I}$ de représentations unitaires de G telles que $\forall i \in I, \quad R_i \cong S_i$ alors $\bigoplus_i R_i \cong \bigoplus_i S_i$ (si T_i est un isomorphisme de R_i dans S_i, alors $\bigoplus_i T_i$ est un isomorphisme de $\bigoplus_i R_i$ dans $\bigoplus_i S_i$).
3. L'implication directe est la conséquence immédiate du théorème 3.2.
Soit π une représentation, alors $\pi = \bigoplus_{i\in I} \pi_i$ où chaque π_i est une représentation irréductible (elle peut apparaitre plusieurs fois). Alors $\chi_\pi = \sum_{i\in I} \chi_{\pi_i}$ donc $\chi_\pi = \sum_{j\in I} a_j \chi_{\pi_j}$ où les π_j sont des sous-représentations irréductibles de π deux à deux non isomorphes et a_j est la nombre (entier !) de sous-représentation de π isomorphes à π_j. L'orthogonalité des caractères montre que
$$< \chi_\pi, \chi_\pi >_{L^2(G)}= \sum_{j\in J} a_j^2 < \chi_{\pi_j}, \chi_{\pi_j} >_{L^2(G)}= \sum_{j\in J} a_j^2.$$
Ainsi le produit scalaire $< \chi_\pi, \chi_\pi >_{L^2(G)}$ est égal à 1 ssi $\sum_{j\in J} a_j^2 = 1$ c'est-à-dire $\operatorname{card} J = 1$, et $a_j = 1$, c'està-dire π est irréductible.

■

4 Etude de la représentation régulière gauche

Une petite digression sur les représentations quasi-régulières

Nous avons montrer quand le chapitre précédent que toute représentation irréductible de G apparait dans la représentation régulière droite R_d de G. Le résultat reste valable pour la représentation régulière gauche. En effet, l'opérateur $T : \left\{ \begin{array}{lcl} L^2(G) & \to & L^2(G) \\ u & \mapsto & (g \mapsto u(g^{-1}) \end{array} \right.$ est clairement un automorphisme linéaire de G. D'autre part, on

$$\forall h \in G, \quad [T \circ R_g(h)]u(g) = [T(x \mapsto u(h^{-1}x))](g) = (x \mapsto u(h^{-1}x^{-1})(g) = u(h^{-1}g^{-1})$$

et

$$\forall h \in G, \quad [R_d(h) \circ T]u(g) = [R_d(h)(x \mapsto u(x^{-1}))](g) = (x \mapsto u((xh)^{-1}))(g) = u(h^{-1}g^{-1}),$$

ce qui montre que

$$\forall h \in G, \quad [T \circ R_g(h)] = [R_d(h) \circ T]$$

donc T est un isomorphisme de R_d dans R_g (et même de R_g dans R_d car T est une symétrie). Ainsi si π est une sous-représentation de R_d alors $T \circ \pi \circ T^{-1}$ est une sous-représentation de R_g et réciproquement.

Quel est alors l'intérêt de considérer la représentation régulière gauche de G ? Cela découle des notations des groupes opérant sur un ensemble. Traditionnellement (en tout cas en Europe), on dit qu'un groupe G agit sur un ensemble X (dans la pratique de nature géométrique, par exemple une quadrique, etc) s'il existe une application $G \times X \to X, \quad x \mapsto g.x$ qui satisfait aux conditions suivantes :

$$\forall g \in G, x \in X, \quad 1.x = x, \quad g.(h.x) = (gh).x$$

En particulier, si G agit transitivement sur X, on considère $x_0 \in X$ (le point de base),.Le stabilisateur de x_0 est le sous-groupe H de G défini par

$$H = \{g \in G, \quad g.x_0 = x_0\}$$

Alors deux éléments g et h de G fournissent le même point de X ssi

$$g.x_0 = h.x_0 \Leftrightarrow (h^{-1}.g).x_0 = x_0 \Leftrightarrow h^{-1}g \in H \Leftrightarrow g \in hH.$$

En utilisant cette notation, l'ensemble X est en bijection avec les classes à gauche de G i.e. H/G, d'où le nom d'action à gauche de G sur X. Si l'on veut faitre agir le groupe G non plus sur l'ensemble géométrique X mais sur les fonctions vivants sur X (ce qui est le cas courant, par exemple un physicien ou un utilisateur des mathématiques, aime peut-être bien une boule, mais il veut surtout étudier la répartition de la chaleur dans cette boule !) on est tenté la première fois de considérer l'action

$$\forall f : G \to \mathbb{C}, \forall g \in G \quad (U(g)f)(x) = f(g.x).$$

Bien entendu, pour $g \in G$ fixé, l'application $U(g) : \mathcal{F}(X, \mathbb{C}) \to \mathcal{F}(X, \mathbb{C}), \quad f \mapsto U(g)f$ est une application linéaire bijective dont l'inverse est $U(g^{-1})$ (je laisse la vérification au lecteur). Le seul hic est donné par les calculs suivants :

$$[U(g) \circ U(g')f](x) = U(g)[x \mapsto f(g'.x)] = f(g'.(g.x)) = f((g'.g).x) = U(g'g)f(x)$$

donc $U(g) \circ U(g') = U(g'g)$ et $g \mapsto U(g)$ n'est plus une représentation de G dans $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$. Si l'on souhaite obtenir une véritable représentation, il est indispensable de prendre comme définition de $U(g)$ la formule

$$\forall f : G \to \mathbb{C}, \forall g \in G \quad (U(g)f)(x) = f(g^{-1}.x).$$

Dans ce cas, pour des raisons de commodité, on considère l'action (à droite) de G sur X défini par

$$\forall g \in G, x \in X, \quad 1.x = x, \quad g\#x = g^{-1}.x$$

et l'espace X est alors en bijection avec les classes à droite de G i.e. G/H (dans ce cas, on la formule $\forall g \in G, x \in X, \quad g\#(h\#x) = (hg)\#x$ et c'est une action à droite). En fait, les actions à gauche sont tout à fait naturel sur les ensembles géométriques et les actions naturelles sur les fonctions (sur cet ensemble géométrique) proviennent des actions géométriques à droite. C'est une dualité naturelle en algèbre linéaire : les vecteurs se transforment sous l'action d'un endomorphisme a en $y = a(x)$ et les coordonnées (qui sont des fonctions particulières de l'espace vectoriel dans $\mathbb{C}$) en $X = PY \Leftrightarrow Y = P^{-1}X$, donc si l'on compose par deux endomorphismes a et b, les vecteurs se transforment selon $b \circ a$ et les coordonnées selon $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$. Nous serons amener ainsi à considérer des représentations de G dans $L^2(G/H)$.

Examinons un instant une application possible et très concrète de la théorie des représentations : nous disposons d'une expression numérique u (à priori à valeurs complexes) que l'on sait périodique de période T (issue des propriétés de notre système physique : par exemple, notre système physique possède une périodicité géométrique comme un cristal unidimensionnel illimité), définie sur $\mathbb{R}$ (ce que le physicien espère) et qui satisfait à l'équation différentielle

$$(E) : u" + \cos \frac{2\pi x}{T} u = g$$

où g est également T périodique (pour les mêmes raisons que u).

1. la méthode barbare (et rarement efficace) : on se dit que l'on va résoudre cette équation par la variation de la constante, puis chercher les solutions T périodiques de cette équation (E). Je laisse le soin au lecteur de faire les calculs pour se convaincre du peu d'utilité de la méthode. En outre, elle suppose que nous disposons d'une méthode (ici la variation de la constante) pour résoudre une telle équation, ce qui est rarement le cas dans la pratique.
2. la méthode issue d'un peu de réflexion. La fonction u est T périodique i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x+T) = u(x)$$

Le groupe $\mathbb{Z}$ agit (non transitivement) sur notre ensemble $\mathbb{R}$ par $(n, x) \mapsto x + Tn$.(cela traduit la périodicité géométrique). Nous en déduisons une action (quasi-régulière) du groupe $\mathbb{Z}$ dans les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ en posant

$$\Pi(n) : u \mapsto (x \mapsto u(x - nT))$$

(qui traduit la périodicité des différentes fonctions intervenant dans notre problème). Notre ensemble géométrique $\mathbb{R}$ Introduisont la famille d'opérateurs et notons H l'opérateur $u \mapsto \dfrac{d^2}{dx^2} + \cos \dfrac{2\pi x}{T} u$ (on ne se pose pas la question, pour l'instant, des justifications nécessaires à l'existence de H ni aux différentes analogies avec les groupes finis que nous allons utiliser dans la suite). Je laisse le soin au lecteur de vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \Pi(n) \circ H = H \circ \Pi(n).$$

L'opérateur H est un opérateur d'entrelacement de cette représentation U. Si nous savons décomposer notre représentation U en somme d'irréductibles (Π_i), i.e. on sait décomposer notre fonction u en une somme de fonctions u_i, où $u_i \in Vect(V_{\Pi_i})$. Le calcul de Hu revient au calcul des Hu_i. Pour cela, on remarque H est un opérateur d'entrelacement de la représentation irréductible Π_i donc il agit sur $Vect(V_{\Pi_i})$ comme une homothétie de rapport λ_i. Puisque $u_i \in H_i$, ceci implique que

$$\Pi_i u_i = \lambda_i u_i$$

où il est important de remarquer que λ_i ne dépend pas de u_i et donc de u !
Ainsi $\Pi u = \sum_i \lambda_i u_i$. Si nous décomposons notre fonction g relativement à décomposition de Π en irréductible, i.e.

$$g = \sum_i g_i, \text{ avec } g_i \in Vect(V_{\Pi_i})$$

Les sous-espaces $(Vect(V_{\Pi_i}))$ étant en somme directe, l'équation (E) est équivalente aux équations

$$\forall i, \quad \lambda_i u_i = g_i$$

ce qui implique que notre fonction u est égale à

$$u = \sum_{i \in I} \frac{g_i}{\lambda_i} + \sum_{j \in J} h_i$$

où I est l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i \neq 0$, J est l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i = 0$ et h_i est une fonction quelconque dans $Vect(V_{\Pi_i})$.
Nous venons de voir que la connaissance des représentations (abstraites) irréductibles de $\mathbb{Z}$ et la connaissance des irréductibles de $\mathbb{Z}$ intervenant dans Π nous permettait de réduire notre problème à un certain nombre (peu être infini) d'équations simplissimes à résoudre.
En fait, le groupe $\mathbb{Z}$ étant commutatif, les représentations irréductibles sont ses caractères. Dans l'article "une approche heuritisque de la fonction zêta", nous indiquons la méthode pour déterminer les caractères de $\mathbb{Z}$ à partir de ceux de $\mathbb{R}$ (par la dualité de Pontriaguin). Les difficultés seront maintenant de justifier la convergence des séries et intégrales (remplaçant les sommes sur les groupes finis) intervenant dans le cas des groupes infinis (mais ce n'est pas notre problème ....pour l'instant).

Le procédé que je viens de décrire est très général. Les groupes finis interviennent très naturellement en cristallographie : une molécule organique M correspond géométriquement à un polyèdre P à n sommets (placement des éléctrons), on considère le groupe des isométries G du polyèdre P est un groupe (non commutatif) et tout problème numérique concernant cette molécule se ramène, généralement, à un certain opérateur d'entrelacement de la représentation quasi-régulière de G sur les fonctions vivants sur P.

En un certain sens, la théorie des représentations est la notion duale des symétries géométriques. En géométrie, il est, à l'usage, intéressant de se placer dans un repère utilisant le plus possible les symétries. En analyse, il est indispensable de considérer notre fonction u dans un bon repère (donc de pouvoir utiliser ses bonnes "coordonnées" u_i)

Quelques égalités remarquables

La proposition 3.1 montre que toutes les représentations irréductilbles de G apparaissent dans la représentation régulière droite de G donc dans sa représentation régulière gauche. Le nombre de fois où apparait une représentation π dans une représentation π' est le nombre de sous-représentations de π' isomorphes à π donc ce nombre est égal à $< \chi_\pi, \chi_{\pi'} >_{L^2(G)}$, d'après le corollaire 3.1

Théorème 4.1
Soit π une représentation irréductible de G. Le nombre de fois a_π où π apparait dans R_g est égale à $d_\pi (= \dim V_\pi)$. En outre, les égalités suivantes sont vérifiées

$$\sum_{\pi \in \Pi(G)} a_\pi^2 = \sum_{\pi \in \Pi(G)} d_\pi^2 = \operatorname{card} G$$

et

$$\forall g \neq 1 \in G, \qquad \sum_{\pi \in \Pi(G)} d_\pi \chi_\pi(g) = 0$$

Preuve :
Notons χ le caractère de la représentation régulière gauche de G. Calculons explictement son caractère. Pour cela, nous considérons la base canonique de $L^2(G)$ constitué des masses de Dirac $(\delta_h)_{h\in G}$.

$$[R_d(g)\delta_h](x) = \delta_h(g^{-1}x) = \delta_{gh}(x) \Rightarrow R_d(g)\delta_h = \delta_{gh}.$$

Le coefficient (h,h) de la matrice de $R_d(g)$ est nul si $gh \neq h \Leftrightarrow g \neq 1$ et il est égal à 1 si $gh = h \Leftrightarrow g = 1$. Ainsi la trace de $R_d(g)$ qui la somme des coefficients diagonaux (h,h) est égal à 0 si $g \neq 1$ et $\operatorname{card} G$ si $g = 1$, d'où

$$\chi_R = \operatorname{card} G \times \delta_1.$$

Le nombre de fois où π apparait dans R_g est

$$< \chi_R, \chi_\pi >_{L^2(G)} = < \delta_1, \chi_\pi >_{L^2(G)} = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g\in G} \operatorname{card} G \times \delta_1(g)\overline{\chi_\pi(g)} = \frac{\operatorname{card} G \times \chi_\pi(1)}{\operatorname{card} G} = \chi_\pi(1) = \dim V_\pi = d_\pi$$

Le lemme 3.1 montre que

$$\chi_R = \sum_i \chi_{\pi_i}.$$

où les $(\pi_i)_i$ sont les représentations irréductibles de G et le théorème 3.1 (valable, rappelons le pour la représentation régulière gauche de G), nous fourni l'égalité

$$\chi_R = \sum_{\pi \in \Pi(G)} d_\pi \chi_\pi.$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{card} G \times \delta_1 = \sum_{\pi \in \Pi(G)} d_\pi \chi_\pi.$$

En évaluant cette égalité en $g = 1$ et en $g \neq 1$, on obtient les deux égalités souhaitées. ∎

La transformation de Fourier sur $L^2(G)$

Si le groupe G est commutatif, nous avons introduit une transformation de Fourier d'une fonction f de $L^2(G)$ définie comme étant la décomposition de cette fonction en une somme de caractères du groupe G (tous les caractères de G inetrvenant en général), autrement dit nous avons utiliser la décomposition en sous-représentations irréductibles de degré 1 de la représentation régulière de G pour construire notre représentation. Nous serions tentés par analogie de vouloir écrire toute fonction sur G comme une superposition de caractères de G, c'est-à-dire démontrer que $L^2(G) = \dim_{\mathbb{C}} Vect(\chi, \chi \in \widehat{G}\}$. Cela est absolument impossible car la dimension sur $\mathbb{C}$ de $L^2(G)$ est $\operatorname{card} G$ et $\dim_{\mathbb{C}} Vect(\chi, \chi \in \widehat{G}\} = \operatorname{card} \widehat{G}$ (les caractères formant une famille orthonormale) et $\operatorname{card} G = \operatorname{card} \widehat{G}$ ssi G est commutatif (cf. proposition 2.1 ! Une seconde stratégie est de remarquer que le caractère d'une représentation irréductible de degré 1, R_χ, est χ. La famille des caractères des représentations représentations irréductibles est orthonormale donc on peut espérer que toute fonction sur G se décompose en une somme de caractères (de représentations). Remarquons pour commencer que si π désigne une représentation de G, alors

$$\forall g \in G, \quad \chi_\pi(g) = \operatorname{tr} \pi(g) \Rightarrow \forall g, h \in G, \quad \chi_\pi(hgh^{-1}) = \operatorname{tr}(\pi(hgh^{-1}) = \operatorname{tr}(\pi(h) \operatorname{tr} \pi(g) \pi(h)^{-1}) = \operatorname{tr} \pi(g) = \chi_\pi(g).$$

Ainsi tous les caractères (de représentations) de G sont des fonctions constantes sur les classes de conjuguaison de tous les éléments $g \in G$ $(\{hgh^{-1}, \quad h \in G\}$. Si l'on décompose une fonction f en somme de caractères (de représentation), cela implique par linéarité que notre fonction f est constante sur les classes de conjuguaison, ce qui est faux en général. Le groupe G n'étant pas commutatif, il existe g et h tel que $hg \neq gh \Leftrightarrow g \neq hgh^{-1}$ et de penser à la fonction δ_g que l'on évalue en g et en hgh^{-1}. Peut-on écrire toute fonction constante sur les classes de conjuguaison de G en une superposition de caractères (de représentations) ?

Définition 4.1
Soit π une représentation d'un groupe fini G. Soit $f \in L^2(G)$, on définit Op_π un endomorphisme de V_π en posant

$$Op_\pi(f) : \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g \in G} f(g) \pi(g^{-1})$$

Lemme 4.1
Soit π une représentation et (π_i) des sous-représentations de π tels que $R_g = \bigoplus_i \pi_i$ alors

$$\forall f \in L^2(G), \quad Op_\pi(f) = \bigoplus_i Op_{\pi_i}(f)$$

Preuve :
Soit $u \in V_\pi$. La fonction u se décompose en une somme $\sum_i u_i$ de fonctions $u_i \in V_{\pi_i}$ donc

$$Op_\pi(f)u = \sum_{g \in G} f(g) \pi(g^{-1}) \sum_i u_i = \sum_i \sum_{g \in G} f(g) \pi(g^{-1}) u_i.$$

La définition 2.4 montre que

$$\forall u_i \in V_{\pi_i}, \quad \pi(g^{-1}) u_i = \pi(g^{-1})_{|V_{\pi_i}} u_i \underset{\text{par définition}}{=} \pi_i(g^{-1}) u_i$$

Nous obtenons alors l'écriture suivante

$$Op_\pi(f)u = \sum_i \sum_{g\in G} f(g)\pi_i(g^{-1})u_i = \sum_i Op_{\pi_i}(f)u_i$$

ou encore, en suivant la définition 1.1,

$$Op_\pi(f) = \bigoplus_i Op_{\pi_i}(f)$$

■

Lemme 4.2
Pour toute représentation π d'un groupe fini G et pour toute fonction $f \in L^2(G)$, on a

$$\operatorname{tr} Op_\pi(f) =< f, \chi_\pi >_{L^2(G)}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} Op_\pi(f) &= \frac{1}{\operatorname{card} G} \operatorname{tr} \sum_{g\in G} f(g)\pi(g^{-1}) = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g\in G} f(g) \operatorname{tr} \pi(g^{-1}) = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g\in G} f(g)\chi_{\pi_i}(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g\in G} f(g)\overline{\chi_{\pi_i}(g)} =< f, \chi_\pi >_{L^2(G)}
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.1
Pour toute fonction $f \in L^2(G)$, on a

$$f(1) = \sum_{\pi\in\Pi(G)} d_\pi < f, \chi_\pi >_{L^2(G)}$$

Preuve :
Le lemme 4.1 appliquer à la représentation régulière gauche de G montre que

$$Op_{R_g}(f) = \bigoplus_i Op_{\pi_i}(f)$$

où (π_i) est la décomposition en sous-représentations irréductibles de R_g. L'application de la définition 1.1 fournit l'égalité

$$\operatorname{tr} Op_{R_g}(f) = \sum_i \operatorname{tr} Op_{\pi_i}(f)$$

et le lemme 4.2 nous donne

$$< f, \chi_{R_g} >_{L^2(G)}= \sum_i < f, \chi_{\pi_i} >_{L^2(G)} .$$

Nous savons que chaque classe $\pi \in \Pi(G)$ apparait d_π fois dans la représentation régulière gauche. Dans la preuve du théorème 4.1, nous avons montrer que $\chi_{R_g} = \operatorname{card} G \times \delta_1$. Si nous regroupons les représentations π_i isomorphes à π dans la somme précédentes et si remarquont que $\chi_\pi = \chi_{\pi_i}$ pour chacune de ces représentations, on a

$$f(1) = \sum_i d_\pi < f, \chi_\pi >_{L^2(G)}$$

■

une représentation d'un groupe fini G et $(\pi_i)_i$ une famille de sous-représentations de π tel que Soit $f \in L^2(G)$,

Considérons la représentation régulière gauche de G. Soit $f \in L^2(G)$, nous allons calculer la trace de l'opérateur $Op_R(f) = \sum_{g\in G} f(g)R(g^{-1})$ de deux façons.

Le théorème 4.1 montre que $\chi_{R_g} = \operatorname{card} G \times \delta_1$)a pour trace

$$\operatorname{tr} Op_{R_g}(f) = \sum_{g \in G} f(g) \operatorname{tr} R_g(g^{-1}) = \sum_{g \in G} f(g) \operatorname{card} G \times \delta_1(g^{-1}) = \operatorname{card} G \times f(1).$$

Nous allons calculer d'une autre façon la trace de $Op_{R_g}(f)$. La représentation R_g se décompose en une somme de sous-représentations irréductibles (π_i),

$$R_g = \bigoplus_i \pi_i.$$

Le lemme 4.1 montre que

$$Op_{R_g}(f) = \bigoplus_i Op_{\pi_i}(f)$$

et la définition 1.1 nous permet d'écrire

$$\operatorname{tr} Op_{R_g}(f) = \sum_i \operatorname{tr} Op_{\pi_i}(f).$$

Ainsi pour calculer la trace de l'opérateur Op_{R_g} il suffit de calculer la trace de cet opérateur sur l'espace V_{π_i} pour chaque entier i (si l'on raisonne matriciellement, c'est une attitude naturelle).

$$\operatorname{tr} Op_{\pi_i}(f) = \operatorname{tr} \sum_{g \in G} f(g)\pi_i(g^{-1}) = \sum_{g \in G} f(g) \operatorname{tr} \pi_i(g^{-1}) = \sum_{g \in G} f(g)\chi_{\pi_i}(g^{-1}) = \sum_{g \in G} f(g)\overline{\chi_{\pi_i}(g)} = \operatorname{card} G < f, \chi_\pi >_{L^2(G)}$$

Définition 4.2
Une fonction $f \in L^2(G)$ est dite centrale ssi $\forall g, h \in G, \quad f(hgh^{-1}) = f(g)$. On note $L^2_c(G)$ l'ensemble des fonctions centrales de $L^2(G)$.

Proposition 4.2
Si f est une fonction centrale alors l'opérateur $Op_\pi(f)$ est un entrelacement de π dans π.
Si en outre, π est un représentation irréductible de G, l'opérateur Op_π est une homothétie de rapport $\dfrac{\operatorname{card} G}{d_\pi} < f, \overline{\chi_\pi} >_{L^2(G)}$.

Preuve :
La fonction f est centrale donc

$$\forall h \in G, \quad \pi(h)^{-1}Op_\pi(f)\pi(h)^{-1} = \sum_{g \in G} f(g)\pi(h)^{-1}\pi(g^{-1})\pi(h) = \sum_{g \in G} f(g)\pi(h^{-1}g^{-1}h) = \sum_{g \in G} f(g)\pi((h^{-1}gh)^{-1}) \underset{g \leftarrow h^{-1}gh}{=} \sum$$

+Si π est irréductible, le lemme de Schur montre que Op_π est une homothétie. Pour calculer son rapport λ, il suffit d'évaluer sa trace

$$d_\pi \lambda = \operatorname{tr} Op_\pi(f) = \operatorname{tr} \sum_{g \in G} f(g)\pi(g^{-1}) = \sum_{g \in G} f(g) \operatorname{tr} \pi(g^{-1}) = \sum_{g \in G} f(g)\chi_\pi(g^{-1}) = \sum_{g \in G} f(g)\overline{\chi_\pi(g)} = \operatorname{card} G < f, \chi_\pi >_{L^2(G)}$$

donc

$$\lambda = \frac{\operatorname{card} G}{d_\pi} < f, \overline{\chi_\pi} >_{L^2(G)}$$

■

Théorème 4.2
L'application $f \mapsto \sum_{\pi \in \Pi(G)} < f, \chi_\pi >_{L^2(G)} \chi_\pi$ est une isométrie de $L^2_c(G)$.

Corollaire 4.1
Le nombre de classe de représentations irréductibles de G est égal au nombre de classe de conjuguaison de G.