La fonction Gamma

Abdellah Bechata

www.mathematiques.ht.st

Table des matières

1 Définition 1

2 Prolongement de Γ 2

3 Identités remarquables 4

4 Exercices 6

Résumé

Nous établissons dans cet article le prolongement de la fonction Γ à $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$ ainsi que différentes identités remarquables satisfaite par cette fonction

1 Définition

Nous commençons par un rappel

Définition 1.1
Soit s un nombre complexe, on définit pour tout nombre réel positif x, la fonction puissance $x \mapsto x^s$ par

$$x^s \underset{\textit{par definition}}{=} e^{s \ln x}.$$

Lemme 1.1
Soit s un nombre comlexe. La fonction $t \mapsto t^{s-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ ssi $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Preuve :
La fonction $t \mapsto t^{s-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ pour nombre complexe s. Le lemme se démontre à l'aide des théorèmes de comparaisons du calcul intégral et des formules suivantes

$$\left|t^{s-1}e^{-t}\right| = t^{\mathrm{Re}(s)-1}e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{\mathrm{Re}(s)-1} \text{ et } \left|t^{s-1}e^{-t}\right| = t^{\mathrm{Re}(s)-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-\frac{t}{2}})$$

■

Définition 1.2
La fonction Gamma est définie sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 0\}$ par

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\, dt.$$

Lemme 1.2
La fonction Γ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^\times$ (resp. holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 0\}$) et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{R}_+^\times \ (\textit{resp.}\mathbb{C} \textit{ tel que } \mathrm{Re}(s) > 0),\ \Gamma^{(k)}(s) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{s-1}e^{-t}\, dt.$$

Preuve :

– Pour l'holomorphie, il suffit d'appliquer la version holomorphe du théorème de domination de Lebesgue à la fonction $t \mapsto t^{s-1}e^{-t}$ ainsi que le lemme 1.1 Rappelons néanmoins ce théorème :
Soit (X,μ) un espace mesurable, Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une application de $X \times \Omega$ dans $\mathbb{C}$ telle que

1. Pour presque tout $x \in X$, l'application $\left\{ \begin{array}{c} \Omega \to \mathbb{C} \\ z \mapsto f(z,x) \end{array} \right.$ est holomorphe.
2. Pour tout $z \in \Omega$, il existe un voisinage V_z de z et une fonction μ-intégrable $g_z : X \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall w \in V_z \text{ et p.p}\forall x \in X,\ \ |f(w,x)| \leqslant g_z(x).$$

Alors l'application $z \mapsto \int\limits_X f(z,x)\ d\mu(x)$ est holomorphe sur Ω.

– Pour le caractère C^∞ de Γ, on procède par récurrence en considérant, pour $a > 0$ fixé, l'hypothèse de récurence $\mathcal{H}_k$:

$$\Gamma \text{ est de classe } C^k \text{ sur } [a,+\infty[\text{ et } \Gamma^{(k)}(s) = \int\limits_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{s-1}e^{-t}dt$$

et en appliquant le théorème de dérivation sous le signe $\int$ de Lebesgue ainsi que le lemme 1.1. Il suffit que constater que

$$\left|(\ln t)^k t^{s-1}e^{-t}\right| \leqslant |(\ln t)|^k\, t^{s-1}e^{-t} \leqslant |(\ln t)|^k\, t^{a-1}e^{-t}$$

ainsi que l'intégrabilté de $t \mapsto |(\ln t)|^k\, t^{a-1}e^{-t}$ en montrant qu'elle est négligeable en 0 à $t^{\frac{a}{2}-1}$ et à $e^{-\frac{t}{2}}$ en $+\infty$. Je laisse la preuve complète au lecteur

■

Le lemme suivant montre que la fonction Γ est la généralisation de la factorielle usuelle et qu'elle satisfait à une équation fonctionnelle qui nous permettra de la prolonger à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$ où $\mathbb{Z}_- = \{n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n \leqslant 0\}$.

2 Prolongement de Γ

Lemme 2.1
Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 0$, *on a*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s). \tag{1}$$

et si $n \in \mathbb{N}^\times$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

Preuve :
La preuve de la première formule est immédiate à l'aide d'une intégration par partie et la seconde se traite par récurrence et en calulant explicitement $\Gamma(1)$. ■

Théorème 2.1 (Prolongement de Gamma)
La fonction Γ s'étend (en une fonction holomorphe) à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$ tout entier et pour tout entier négatif n,

$$\lim_{x \to n}(x-n)\Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{(-n)!}$$

Preuve :

première méthode Le terme de gauche de l'égalité 1 est définie si $\mathrm{Re}(s+1) > 0$ c'est-à-dire $\mathrm{Re}(s) > -1$ et, formellement, on peut définir $\Gamma(s)$ si $\mathrm{Re}(s) > -1$ par $\frac{\Gamma(s+1)}{s}$. Il nous faut démontrer que cette nouvelle fonction prolonge Γ et satisfait à l'équation fonctionnelle 1. Considérons la fonction (holomorphe) Γ_1 définie sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > -1$ privé de $s = 0$ par

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) > -1 \text{ et } s \neq 0,\ \Gamma_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$$

Si $\mathrm{Re}(s) > 0$, on a

$$\Gamma_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \frac{s\Gamma(s)}{s} = \Gamma(s).$$

Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > -1$, alors $\Gamma_1(s+1) = \dfrac{\Gamma(s+2)}{s+1}$ et puisque $\mathrm{Re}(s+1) > 0$, nous pouvons appliqué l'égalité 1 donc

$$\Gamma_1(s+1) = \frac{(s+1)\Gamma(s+1)}{s+1} = \Gamma(s+1) = s\Gamma_1(s).$$

De la même façon, on défint une fonction (holomorphe) Γ_2 par $\dfrac{\Gamma_1(s+1)}{s}$. Pour cela il est indispensable que $s \neq 0$ (!), que $\mathrm{Re}(s+1) > -1$ i.e. $\mathrm{Re}(s) > -2$ et que $s+1 \neq 0$ (car $\Gamma_1(0)$ n'est pas définie) ce que l'on résume par

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) > -2 \text{ et } s \neq 0, s \neq -1,\ \Gamma_2(s) = \frac{\Gamma_1(s+1)}{s}$$

Je laisse au lecteur le soin de vérifier que cette fonction Γ_2 prolonge Γ_1 et satisfait à l'équation fonctionnelle 1. On procède ensuite par récurrence en définissant une fonction Γ_k définie par

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) > -2 \text{ et } s \notin \{0, .., -k+1\},\ \Gamma_k(s) = \frac{\Gamma_{k-1}(s+1)}{s}$$

qui satisfait à l'équation fonctionnelle 1. L'expression $\widetilde{\Gamma}$, donnée par

$$\widetilde{\Gamma}(s) = \Gamma_k(s) \text{ si } \mathrm{Re}(s) > -k,$$

est bien définie et elle détermine une fonction (holomorphe) sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$ qui satisfait à 1.

$$\boxed{\text{Par la suite, on notera, par abus, } \Gamma \text{ la fonction } \widetilde{\Gamma}.}$$

Pour la limite, il suffit de remarquer que pour n entier négatif,

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \frac{\Gamma(s+2)}{s(s+1)} = .. = \frac{\Gamma(s-n+1)}{s(s+1)..(s-n-1)(s-n)}.$$

Deuxième méthode La définition intégrale de Γ montre que le problème de l'existence de $\Gamma(s)$ provient de la non intégrabilité de $t \mapsto t^{s-1}$ si $\mathrm{Re}(s) \leqslant 0$. On applique la relation de Chasles :

$$\forall s \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) > 0,\ \Gamma(s) = \int_1^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt + \int_0^1 t^{s-1}e^{-t}\,dt.$$

La fonction $s \mapsto \int_1^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$ est définie sur $\mathbb{C}$ tout entier (et il s'agit d'une fonction holomorphe d'après la version holomorphe du théorème de Lebesgue). Dans la seconde intégrale, on dévellope en série entière la fonction $t \mapsto e^{-t}$ et il est aisé de vérifier que l'on peut permuter la série et l'intégrale.

$$\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}\,dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{s-1}\frac{t^n}{n!}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+s-1}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{s+n}.$$

Cette dernière expression est défine sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$ et détermine une fonction holomorphe sur cet ouvert. Nous définissons alors $\widetilde{\Gamma}$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$ par

$$\forall s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-,\ \widetilde{\Gamma}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{s+n} + \int_1^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt.$$

Il est immédiat que cette nouvelle fonction prolonge Γ, qu'elle est holomorphe et qu'elle satisfait à 1. La limite s'obtient par le théorème de permutation limite-série.

∎

3 Identités remarquables

Théorème 3.1 (Formule des compléments)

$$\forall s \in \mathbb{C} \textit{ tel que } 0 < \mathrm{Re}(s) < 1,\ \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Cette formule reste valable par prolongement analytique si $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

Preuve :
Toutes les justifications de convergence d'intégrales sont élémentaires dans cette preuve et les justifications de permutation des symboles d'intégrations se font en invoquant le théorème de Fubini.

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} u^{s-1}v^{-s}e^{-u}e^{-v}\ dv\ du = \int_0^{+\infty} dt\ v^{-s}e^{-v}(\int_0^{+\infty} u^{s-1}e^{-u}\ du)$$

On effectue le changement de variable $u' = \frac{u}{v}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \int_0^{+\infty} dv\ e^{-v}(\int_0^{+\infty} u^{s-1}e^{-uv}\ du) = \int_0^{+\infty} du\ u^{s-1}e^{-uv}\int_0^{+\infty} dv\ e^{-v}e^{-uv}) \\
&= \int_0^{+\infty} du\ u^{s-1}(\int_0^{+\infty} dv\ e^{-v(1+u)}) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{s-1}}{1+u}\ du \\
&= \int_0^{1} \frac{u^{s-1}}{1+u}\ du + \int_1^{+\infty} \frac{u^{s-1}}{1+u}\ du
\end{aligned}$$

On efectue le changement de variable $u' = \frac{1}{u}$ dans la seconde intégrale et l'on obtient

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{1+u}\ du + \int_0^1 \frac{u^{-s}}{1+u}\ du$$

Si l'on pose $f(s) = \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{1+u}\ du$, l'égalité précédente montre que $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = f(s) + f(1-s)$.

Pour simplifier l'expression de f, on est tenté de développer en série entière $\frac{1}{1+u}$ et de permuter les symboles séries-intégrales. Malheurement, ce n'est pas possible en utilisant la convergence normale sur un segment ou les théorèmes de convergence dominée.. Conclusion, on va mettre les mains dans le camboui (qui n'est pas trop sale quand même).

Quelque soit l'entier naturel n, on $\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u^k + \frac{(-1)^n u^n}{1+u}$ donc

$$\begin{aligned}
f(s) &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_0^1 u^{k+s-1}\ du + (-1)^n \int_0^1 \frac{u^{n+s-1}}{1+u}\ du \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+s} + (-1)^n \int_0^1 \frac{u^{n+s-1}}{1+u}\ du
\end{aligned}$$

L'intégrale tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ car

$$0 \leqslant \left|\int_0^1 \frac{u^{n+s-1}}{1+u} du\right| \leqslant \int_0^1 u^{n+\mathrm{Re}(s)s-1}\ du = \frac{1}{n+\mathrm{Re}(s)} \leqslant \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

d'où

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } 0 < \mathrm{Re}(s) < 1 \quad f(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+s}.$$

On utilise ce développement en série pour donner une autre expression à $\Gamma(s)\Gamma(1-s)$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+s} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-s} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+s} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n-s} \text{ (par un changement de variable)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+s} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{s-n} = \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n s}{s^2-n^2} \text{ (en ajoutant les deux sommes).}
\end{aligned}$$

A cette étape, on se sent mieux car cela ressemble diablement à un exercice des Mines. Après avoir épluché la plupart des annales, on se dit :
" Mais, si j'étudiais le développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie sur $]-\pi,\pi[$ par $f(t) = \cos(st)$, où s est un nombre complexe non entier "
Cette fonction est paire, continue et C^1 sur $]-\pi,\pi[$, continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc elle est développable en série de Fourier et la somme de la série de Fourier est égale à f sur $]-\pi,\pi[$ (quee se passe-t-il ailleurs ?). Bien entendu, on calcule uniquement les coefficients a_n et en repotassant les formules trigos (par exemple, $\cos(a)\cos(b) =$ .., $\cos(a+b) =$ .. et $\cos n\pi =$ ..) on obtient

$$\forall n \geqslant 0 \quad a_n = \frac{2\sin \pi s}{\pi}.\frac{(-1)^n s}{s^2-n^2}$$

(on s'est abstenu de distinguer le cas $n = 0$, car il ne conduit pas à une division par 0). D'où la formule remarquable

$$\forall t \in]0,1[\quad \cos(st) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nt = \frac{\sin \pi s}{\pi s} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin \pi s}{\pi} \frac{(-1)^n s}{s^2-n^2} \cos nt. \tag{2}$$

En fixant $t = 0$, on obtient $1 = \frac{\sin \pi s}{\pi}[\frac{1}{s} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n s}{s^2-n^2}]$ donc

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } 0 < \mathrm{Re}(s) < 1 \quad \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n s}{s^2-n^2} = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

■

Définition 3.1
La fonction de Bessel de seconde espèce est définie par

$$\forall (p,q) \in (\mathbb{C})^2 \text{ avec } \mathrm{Re}(p) > 0 \text{ et } \mathrm{Re}(q) > 0 \quad B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt$$

Je vous laisse justifier que la fonction B est bien définie.

Théorème 3.2
$\forall (p,q) \in (\mathbb{C})^2$ *avec* $\mathrm{Re}(p) > 0$ *et* $\mathrm{Re}(q) > 0 \quad B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Preuve :
Les justifications de permutation des symboles d'intégrations se font en invoquant le théorème de Fubini.

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} u^{p-1}v^{q-1}e^{-u}e^{-v}\, dv\, du = \int_0^{+\infty} u^{p-1}\, du(\int_0^{+\infty} v^{q-1}e^{-(u+v)}\, dv)$$

On effectue le changement de variable $v' = u + v$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} u^{p-1}\ du(\int_u^{+\infty} (v-u)^{q-1} e^{-v}\ dv).$$

On permute les deux symboles d'intégration en remarquant, que v peut décrire tout les réels positifs et que u est positif mais nécessairement inférieur à u

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} dv\ e^{-v} \int_0^{v} (v-u)^{q-1} u^{p-1}\ du$$

On pose $u' = \dfrac{u}{v}$, ce qui nous donne

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} dv\ v^{p+q-1} e^{-v} \int_0^{1} (1-u)^{q-1} u^{p-1}\ du = \Gamma(p+q)B(p,q)$$

Dans l'exercice 4.3, on montre que la fonction Γ ne s'annule jamais, ce qui nous permet d'effectuer la division et de conclure. ■

C'est étrange, une telle formule a été obtenue dans l'article sur l'analyse de Fourier des groupes finis. Nous verrons dans l'article consacré à une approche heuristique de l'équationnelle de la fonction zêta que ceci n'est pas fortuit : il s'agit en fait de son extension au groupe $\mathbb{R}$ (qui n'est pas tout à fait fini).

4 Exercices

Exercice 4.1
En utilisant le formule des compléments, calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$. En déduire $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)dx$.

Exercice 4.2
On considère les intégrales de Wallis $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\ dt$.
Expliciter I_n en fonction Γ et de n (on choisira un choix judicieux de changement de variable, $\sin t = ...$)

Exercice 4.3
On suppose qu'il existe un complexe x_0 non entier négatif tel que $\Gamma(x_0) = 0$.

1. Montrer l'existence d'un complexe z_0 non entier négatif tel que $0 < \mathrm{Re}(z_0) \leqslant 1$ tel que $\Gamma(z_0) = 0$.
2. En utilisant la formule des compléments, montrer que $0 < \mathrm{Re}(z_0) < 1$ est impossible.
3. On suppose que $\mathrm{Re}(z_0) = 1$.
   Par un passage à la limite, montrer que la formule des compléments reste valable. En déduire une contradiction.

Exercice 4.4
On note B_n la boule unité de centre O de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $vol(B_n) = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\ dx \times (vol(B_{n-1}))$.
2. Calculer $\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}$ en fonction de n et Γ.
3. En déduire l'expresion de $vol(B_n)$ en fonction de n (et de la fonction Γ).
4. Retrouver les formules usuelles de la dimension 2 et 3 puis des dimensions 11 et 20 (qui interviennent dans certaines théories quantiques des champs, par exemple : Kaluza-Klein)