ISCID 1999 Option technologique

Exercice 1

Si I_n est la matrice-unité d'ordre n, on posera, par convention, $M^0 = I_n$ pour toute matrice M, carrée d'ordre n.
On notera I la matrice-unité d'ordre 4 (c'est-à-dire $I = I_4$)
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les suites déterminées par la donnée de:

$$\left\{\begin{array}{c} a_0 = 2 \\ b_0 = -1 \\ c_0 = 1 \\ d_0 = -1 \end{array}\right. \text{ et les relations de récurrence : } \left\{\begin{array}{c} a_{n+1} = -a_n - 6b_n + 9c_n - 6d_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 8b_n - 9c_n + 6d_n \\ c_{n+1} = 2a_n + 4b_n - 4c_n + 4d_n \\ d_{n+1} = a_n + 2b_n - 3c_n + 4d_n \end{array}\right.$$

1. Soit, pour tout entier $n \geqslant 0$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$

   (a) Montrer qu'il existe une matrice A, carrée d'ordre 4, telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $X_{n+1} = AX_n$.

   (b) Calculer A^2. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I$.

   (c) En déduire que A est inversible. Présenter alors A^{-1} sous forme d'un tableau de nombres.

2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les suites déterminées par :

$$\left\{\begin{array}{c} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \end{array}\right. \text{ et les relations de récurrence : } \left\{\begin{array}{c} u_{n+1} = -2v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{array}\right.$$

   Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $A^n = u_n I + v_n A$.

3. (a) Montrer qu'il existe une matrice M, carrée d'ordre 2, telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

   (b) Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible, et calculer P^{-1}.

4. Soit $D = P^{-1}MP$. Calculer D, puis, pour tout entier $n \geqslant 0$, D^n.

5. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

   (b) Présenter alors M^n sous la forme d'un tableau de nombres.

   (c) Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

6. (a) Déduire de ce qui précède l'expression, pour tout entier $n \geqslant 0$, de A^n sous la forme d'un tableau de nombres.

   (b) Donner alors l'expression de a_n, b_n, c_n, d_n en fonction de n.

   (c) L'expression de A^n obtenue en a.) pour $n \geqslant 0$ est-elle encore valable pour $n = -1$?

Exercice 2

On rappelle que $2 < e < 3$.
On pose, pour tout entier naturel n,

$$I_n = \int_1^e (\ln t)^n dt$$

1. (a) Justifier que, pour tout n, $I_n > 0$.
   (b) Calculer I_0, puis, en effectuant une intégration par parties, I_1.
   (c) De même, en effectuant une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
   Déduire de cette relation de récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

   $$0 < I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$

   En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un entier p_n tel que $I_n = (-1)^n(ep_n - n!)$ et exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{ep_n}{n!} = 1$

Exercice 3

Partie A

On dispose de deux boîtes B_1 et B_2, et de deux boules numérotées 1 et 2.
On considère l'épreuve aléatoire consistant à placer au hasard, de manière équiprobable, et indépendamment l'une de l'autre, chaque boule dans une boîte.
On appelle alors :
X la variable aléatoire égale au nombre de boules dans la boîte B_1;
N le nombre de boîtes restées vides après l'épreuve (c'est-à-dire ne contenant aucune boule).

1. Quelle est la loi de X ? Donner les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.

2. (a) Déterminer pour $i \in \{0, 1, 2\}$,et $j \in \{0, 1\}$ les probabilités $P((X = i) \cap (N = j))$.
   Présenter les résultats sous la forme d'un tableau à double entrée.
   (b) Donner la loi de N. Calculer $E(N)$ et $V(N)$.

3. (a) Calculer $E(XN) = \sum\limits_{i=0}^{3} \sum\limits_{j=0}^{2} ijP((X = i) \cap (N = j))$.
   (b) En déduire $cov(X, N)$.
   (c) Les variables aléatoires X et N sont-elles indépendantes?

Partie B

On dispose maintenant de trois boîtes $B_1, B_2 et B_3$,et de trois boules numérotées $1, 2$ et 3.
On considère l'épreuve aléatoire consistant à placer au hasard, de manière équiprobable, et indépendamment l'une de l'autre, chaque boule dans une boîte.
On appelle, comme dans la **partie A**
X la variable aléatoire égale au nombre de boules dans la boîte B_1;
N le nombre de boîtes restées vides après l'épreuve (c'est-à-dire ne contenant aucune boule).

1. Quelle est la loi de X ? Préciser, pour tout élément k de $\{0, 1, 2, 3\}$, la valeur de $P(X = k)$.
   Donner aussi les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.

2. Compléter le tableau donné en annexe, qui donne les valeurs respectives des variables aléatoires X et N selon le résultat de l'épreuve aléatoire effectuée.

3. (a) Déduire de l'examen du tableau précédent les valeurs, pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, et $j \in \{0, 1, 2\}$ des probabilités $P((X = i) \cap (N = j))$. Présenter les résultats sous la forme d'un tableau à double entrée.

   (b) Donner alors la loi de N. Calculer $E(N)$ et $V(N)$.

4. (a) Calculer $E(XN) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{2} ijP((X = i) \cap (N = j))$

   (b) En déduire $cov(X, N)$.

   (c) Les variables aléatoires X et N sont-elles indépendantes?

		Annexe		
Contenu de B $_1$	Contenu de B $_2$	Contenu de B $_3$	Valeur de X	Valeur de N
1, 2, 3	-	-		
1, 2	3	-		
1, 2	-	3		
1, 3	2	-		
1, 3	-	2		
2, 3	1	-		
2, 3	-	1		
1	2, 3	-		
1	2	3		
1	3	2		
1	-	2, 3		
2	1, 3	-		
2	1	3		
2	3	1		
2	-	1, 3		
3	1, 2	-		
3	1	2		
3	2	1		
3	-	1, 2		
-	1, 2, 3	-		
-	1, 2	3		
-	1, 3	2		
-	2, 3	1		
-	1	2, 3		
-	2	1, 3		
-	3	1, 2		
-	-	1, 2, 3		