INSEEC
MATHEMATIQUES
1ère épreuve (option technologique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

La durée d'une communication téléphonique est assimilée à une variable aléatoire X dont la fonction de répartition F est donnée par :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ F(x) = 1 - e^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

1. Calculer la probabilité $P(0 \leqslant X \leqslant 2)$.
2. Déterminer la densité f de la loi de X.
3. Calculer l'espérance mathématique de X (on peut faire une intégration par parties)
4. On considère 5000 appels et on décide de comptabiliser le nombre d'appels dont la durée est comprise entre 0 et 2.

   Soit Y le nombre d'appels dont la durée ne dépasse pas 2.

   (a) donner la loi de Y

   (b) déterminer l'espérance et l'écart type de Y
   NB:On donne $e^{-2} = 0,135$

Exercice 2

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier, par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n & 3^n - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. On considère les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}, (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$U_0 = 2, V_0 = -1, W_0 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} U_{n+1} = 3U_n + 2W_n \\ V_{n+1} = 3V_n + 2W_n \\ W_{n+1} = W_n \end{cases}$$

   On désigne par X_n la matrice : $X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$

   (a) Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$

   (b) Etablir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0$

   (c) Exprimer U_n, V_n et W_n en fonction de n

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0)=0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ f(x)=(x+1)e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f..

1. Etudier la continuité de f sur $[0;+\infty[$.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0.
3. (a) Pour $x>0$, calculer $f'(x)$.
   (b) Déterminer le sens de la variation de f.
4. Etudier la branche infinie de (C)
   on rappelle que $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{e^u-1}{u}=1$.
5. (a) Dresser le tableau de variation de f.
   (b) Construire (C).