



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS  
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT  
Direction des Admissions et concours

---

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES  
E.S.C.P.-E.A.P.  
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

---

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Année 2003

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  et à valeurs réelles.

L'espérance d'une variable aléatoire  $X$  est notée  $E(X)$ . Si  $A$  est un événement de probabilité non nulle on note  $P(E/A)$  la probabilité conditionnelle sachant  $A$  de l'événement  $E$ .

Si  $n$  est un entier naturel non nul et si  $x_1, \dots, x_n$  sont  $n$  réels on note  $\min(x_1, \dots, x_n)$  ou  $\min_{1 \leq i \leq n} x_i$  le plus petit d'entre eux.

On rappelle que deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  prenant des valeurs positives ou nulles sont indépendantes si et seulement si, pour tout couple  $(a, b)$  de réels positifs ou nuls, on a :

$$P([X \leq a] \cap [Y \leq b]) = P([X \leq a])P([Y \leq b])$$

On rappelle qu'une variable aléatoire  $X$  prenant des valeurs positives ou nulles suit une loi exponentielle si et seulement si elle vérifie la propriété, dite d'absence de mémoire :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad P([X > x + y] | [X > x]) = P([X > y])$$

L'objet du problème est l'obtention de diverses caractérisations de la loi exponentielle.

## Partie I : Un résultat d'analyse

On considère une fonction réelle  $\varphi$  continue sur  $[0, 1]$ . On note  $M$  le maximum de la fonction  $|\varphi|$  sur  $[0, 1]$ . Pour tout entier naturel  $n$  non nul et tout réel  $v$  de  $[0, 1]$ , on note  $Y_{n,v}$  une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $v$ .

1. Soit  $n$  un entier naturel non nul,  $x$  un réel de  $]0, 1[$ ,  $\varepsilon$  un réel strictement positif vérifiant les inégalités

$$0 < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon < 1$$

- (a) Comparer, pour tout réel  $v$  de  $[x + \varepsilon, 1]$ , les événements  $[Y_{n,v} \leq nx]$  et  $[|Y_{n,v} - nv| \geq n(v - x)]$  et en déduire les inégalités :

$$P([Y_{n,v} \leq nx]) \leq \frac{v(1-v)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

- (b) Justifier d'une façon analogue, pour tout réel  $v$  de  $[0, x - \varepsilon]$ , l'inégalité :

$$P([Y_{n,v} > nx]) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

- (c) Établir les inégalités :

$$\left| \int_{x+\varepsilon}^1 \varphi(v)P([Y_{n,v} \leq nx])dv \right| \leq \frac{M(1-x)}{2n\varepsilon^2} \text{ et } \left| \int_0^{x-\varepsilon} \varphi(v)(1 - P([Y_{n,v} \leq nx]))dv \right| \leq \frac{Mx}{2n\varepsilon^2}$$

- (d) En déduire l'inégalité :

$$\left| \int_0^x \varphi(v)dv - \int_0^1 \varphi(v)P([Y_{n,v} \leq nx])dv \right| \leq \left( \frac{1}{4n\varepsilon^2} + 2\varepsilon \right) M$$

2. Établir que, pour tout réel  $x$  de  $]0, 1[$ , on a, pour tout entier naturel  $n$  assez grand, l'inégalité :

$$\left| \int_0^x \varphi(v)dv - \int_0^1 \varphi(v)P([Y_{n,v} \leq nx])dv \right| \leq \frac{9M}{4\sqrt[3]{n}}$$

3. On suppose maintenant que la fonction  $\varphi$  vérifie, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\int_0^1 \varphi(v)v^n dv = 0$$

- (a) Justifier, pour tout polynôme  $P$  à coefficient réels, l'égalité :  $\int_0^1 \varphi(v)P(v)dv = 0$ .

- (b) Déduire des questions précédentes que, pour tout réel  $x$  de  $]0, 1[$ , on a l'égalité :

$$\int_0^x \varphi(v)dv = 0$$

- (c) Montrer que la fonction  $\varphi$  est nulle.

Ainsi, on a montré dans cette partie que si  $\varphi$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$  vérifiant pour tout entier naturel  $n$ ,  $\int_0^1 \varphi(v)v^n dv = 0$ , alors  $\varphi$  est nulle.

Dans toute la suite du problème, on considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires **indépendantes, positives ou nulles**, admettant toutes la même densité (nulle sur l'intervalle  $] - \infty, 0[$ ) dont on note  $f$  la restriction à l'intervalle  $[0, +\infty[$ . On suppose que la fonction  $f$  est continue et strictement positive sur  $[0, +\infty[$ .

On note  $F$  la restriction à l'intervalle  $[0, +\infty[$  de la fonction de répartition commune à toutes ces variables.

On suppose de plus que  $X_1$  (et donc chaque variable  $X_i$ ) admet une espérance.

## Partie II : Caractérisations de la loi exponentielle à l'aide du minimum d'un $n$ -échantillon

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $I_n$  l'application définie, pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , par  $I_n(\omega) = \min_{1 \leq i \leq n} X_i(\omega)$  et on **admet** que  $I_n$  est une variable aléatoire qui admet une espérance.

1. Déterminer à l'aide de  $F$ , pour tout entier naturel  $n$  non nul, la fonction de répartition de  $I_n$ .
2. Dans cette question, on suppose que la loi de  $X_1$  (qui est la loi commune à tous les  $X_i$ ) est exponentielle de paramètre  $\lambda$  strictement positif.
  - (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, la variable  $nI_n$  a même loi que  $X_1$ .
  - (b) Déterminer, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'espérance de  $I_n$ .

*L'objet des questions suivantes est d'établir que chacune de ces propriétés est caractéristique de la loi exponentielle.*

3. Dans cette question, on suppose que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $nI_n$  a même loi que  $X_1$ .
  - (a) Établir, pour tout entier naturel  $n$  non nul et tout réel  $x$  positif ou nul, l'égalité :
 
$$F(x) = 1 - \left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$$
  - (b) Déterminer, pour tout réel  $x$  positif ou nul, la valeur de :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)$ .
  - (c) Montrer que la loi de  $X_1$  est exponentielle de paramètre  $F'(0)$ .

4. On revient au cas général.

- (a) Montrer que la fonction  $F$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur  $[0, 1[$ . On note  $F^{-1}$  sa réciproque.
- (b) À l'aide d'un changement de variable, établir, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'égalité :

$$E(I_n) = n \int_0^1 F^{-1}(u)(1-u)^{n-1} du$$

- (c) Établir, pour tout réel  $u$  de  $[0, 1[$ , les inégalités :

$$0 \leq (1-u)F^{-1}(u) \leq \int_u^1 F^{-1}(t) dt$$

En déduire que la fonction  $G$  définie sur  $[0, 1]$  par  $G(u) = (1-u)F^{-1}(u)$  si  $u$  est élément de  $[0, 1[$  et par  $G(1) = 0$  est continue.

Établir, pour tout entier  $n$  au moins égal à 2, les égalités :

$$E(I_n) = n \int_0^1 G(u)(1-u)^{n-2} du \text{ et } E(I_n) = n \int_0^1 G(1-v)v^{n-2} dv$$

- (d) On suppose maintenant qu'il existe un réel  $\lambda$  strictement positif tel que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'espérance de  $I_n$  est égale à  $\frac{1}{n\lambda}$ .

On note  $F_\lambda$  la restriction à  $[0, +\infty[$  de la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  et  $G_\lambda$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $G_\lambda(u) = (1-u)F_\lambda^{-1}(u)$  si  $u$  est élément de  $[0, 1[$  et par  $G_\lambda(1) = 0$ .

- i. Quelle est, pour  $n$  entier naturel au moins égal à 2, la valeur de :  $n \int_0^1 G_\lambda(1-v)v^{n-2} dv$  ?
- ii. À l'aide du résultat de la partie I, montrer que  $G$  et  $G_\lambda$  sont égales.
- iii. En déduire que la loi de  $X_1$  est exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

## Partie III : Caractérisation de la loi exponentielle à l'aide des deux premiers records

On pose  $R_1 = X_1$ . On note  $R_2$  l'application définie, pour tout élément  $\omega$  de  $\Omega$ , par :

$$R_2(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & \text{si } n \text{ est le plus petit des entiers } k \text{ tels que } X_k(\omega) > X_1(\omega) \\ X_1(\omega) & \text{si un tel entier n'existe pas.} \end{cases}$$

On admet que  $R_2$  est une variable aléatoire.

### A. Préliminaire

1. Exprimer l'événement  $[R_2 = R_1]$  à l'aide de la suite d'événements  $([X_k \leq X_1])_{k \in \mathbb{N}^*}$ .
2. Établir, pour tout réel  $t$  positif ou nul et pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'inégalité :

$$P\left(\bigcap_{k=2}^{n+1} [X_k \leq X_1]\right) \leq (F(t))^{n+1} + 1 - F(t)$$

3. Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. En choisissant un réel  $t$  de façon convenable et à l'aide de l'inégalité précédente, montrer que, pour tout entier  $n$  assez grand, on a :

$$P\left(\bigcap_{k=2}^{n+1} [X_k \leq X_1]\right) \leq 2\varepsilon$$

Comment énoncer le résultat obtenu ?

4. En déduire que, presque sûrement,  $R_2 > R_1$ .

### B. La caractérisation

Pour tout couple  $(x, y)$  de réels positifs ou nuls on pose :  $\varphi(x, y) = P([R_1 \leq x] \cap [R_2 - R_1 > y])$ .

1. Soit  $(x, y)$  un couple de réels positifs ou nuls et  $h$  un réel strictement positif.

(a) Justifier l'égalité :

$$\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{+\infty} P([x < X_1 \leq x+h] \cap \left(\bigcap_{i=2}^j [X_i \leq X_1]\right) \cap [X_{j+1} > y + X_1])$$

(b) En déduire les inégalités :

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{1 - F(x)}(1 - F(x+y+h)) \leq \varphi(x+h, y) - \varphi(x, y) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{1 - F(x+h)}(1 - F(x+y))$$

2. Calculer, pour tout couple  $(x, y)$  de réels positifs ou nuls, la limite de  $\frac{\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)}{h}$  quand  $h$  tend vers 0 par valeurs supérieures et, en admettant que le résultat tient encore pour la limite quand  $h$  tend vers 0 par valeurs inférieures, en déduire l'égalité :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}(1 - F(x+y))$$

3. Dans cette question on suppose que la loi de  $X_1$  est exponentielle de paramètre  $\lambda$  strictement positif.

(a) Établir, pour tout couple  $(x, y)$  de réels positifs ou nuls, l'égalité :  $\varphi(x, y) = (1 - e^{-\lambda x})e^{-\lambda y}$ .

(b) En déduire la loi de  $R_2 - R_1$  puis l'indépendance des variables  $R_1$  et  $R_2 - R_1$ .

4. Réciproquement, dans cette question, on suppose que les variables  $R_1$  et  $R_2 - R_1$  sont indépendantes et on note  $G$  la fonction de répartition de  $R_2 - R_1$ .

(a) Établir, pour tout couple  $(x, y)$  de réels positifs ou nuls, l'égalité :  $\frac{1 - F(x + y)}{1 - F(x)} = 1 - G(y)$ .

(b) En déduire que les fonctions  $G$  et  $F$  sont égales puis, à l'aide de la propriété d'absence de mémoire, montrer que la loi de  $X_1$  est exponentielle.