CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Année 2003

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

NUAGES DE POINTS ET APPROXIMATION D'UN NUAGE

Dans tout le problème n et p désignent des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 et on pose $E_p = \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
L'espace E_p est muni de sa structure euclidienne canonique ; la norme euclidienne d'un vecteur x de E_p est notée $\|x\|$; le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E_p est noté $< x, y >$.
Si u est un vecteur non nul appartenant à E_p, D_u désigne la droite vectorielle engendrée par u et si x est un vecteur de E_p, $P_{D_u}(x)$ est le projeté orthogonal de x sur la droite D_u.
Si F est un sous-espace vectoriel de E_p, le supplémentaire orthogonal de F dans E_p est noté $F^{\perp}$.
Pour toute matrice A appartenant à $\mathfrak{M}_{m,\ell}(\mathbb{R})$ on note Φ_A l'application linéaire de $\mathfrak{M}_{\ell,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ définie par : $\forall X \in \mathfrak{M}_{\ell,1}(\mathbb{R}),\ \Phi_A(X) = AX$.
Pour tout r appartenant à $\mathbb{N}^{\times}$ et toute famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ de vecteurs de E_p, $Vect(u_1,\dots,u_r)$ est le sous-espace vectoriel de E_p engendré par les vecteurs $u_1,\dots,u_r$.
Si g est une fonction définie sur un sous-espace vectoriel F de E_p et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on désigne par $\max\limits_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} g(x)$ ou $\max\{g(x); x\in F \text{ et } \|x\|=1\}$ le maximum, lorsqu'il existe, de la fonction g sur l'ensemble des vecteurs x de F dont la norme est égale à 1.

Partie I : Étude d'un exemple

Dans cette partie et uniquement dans celle-ci, on suppose que $p = 2$. On note (u_1, u_2) la base canonique de E_2.

1. On considère les vecteurs v_1, v_2 et v_3 appartenant à E_2 et dont les coordonnées dans la base (u_1, u_2) sont respectivement $(1,2), (-3,-1), (2,-1)$.
   On considère un réel m et on note, pour tout i appartenant à $\{1,2,3\}$, v_i' le projeté orthogonal de v_i sur la droite vectorielle engendrée par $u_1 + mu_2$.

   (a) Calculer en fonction de m la quantité : $\|v_1'\|^2 + \|v_2'\|^2 + \|v_3'\|^2$.

   (b) Déterminer la valeur m_0 de m pour laquelle cette quantité atteint son maximum ; ce maximum est noté λ_1.

2. Soit X la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que λ_1 est une valeur propre de Φ_{X^tX} ; $u_1 + m_0 u_2$ étant un vecteur propre associé à λ_1.

   (b) Déterminer l'autre valeur propre de Φ_{X^tX} et la comparer à λ_1.

Partie II : Les axes principaux d'inertie d'un nuage

Les notations introduites dans cette partie seront utilisées dans toute la suite du problème.
On définit la matrice $X = (x_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ appartenant à $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ appelée nuage ; ses colonnes $c_1, \ldots, c_n$ sont appelées points du nuage ; X est donc un nuage de n points dans un espace de dimension p.
On définit la matrice $V = X\,{}^tX$.
On appelle F le sous-espace vectoriel de E_p engendré par les vecteurs colonnes $c_1, \ldots, c_n$ et on suppose que $\dim F = r$ et $p > r \geqslant 1$.
Pour tout vecteur v non nul de E_p, on pose $I(v) = \sum_{j=1}^{n} \|P_{D_v}(c_j)\|^2$; cette quantité s'appelle l'inertie du nuage X sur la droite D_v.
Pour tout couple de vecteurs (v, w) appartenant à E_p^2 , on pose: $J(v,w) = \sum_{j=1}^n < v, c_j >< w, c_j >$.

1. (a) *Montrer que la matrice V est diagonalisable et que ses valeurs propres sont* des réels positifs ou nuls.
   On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de V et on suppose que $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_p$
   Justifier l'existence d'une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_p)$ de E_p telle que :

   $$\forall i \in [\![1,p]\!],\ Ve_i = \lambda_i e_i$$

   (b)
   - Montrer que le noyau de Φ_V est égal à celui de $\Phi_{{}^tX}$.
   - En déduire que le rang de V est égal à r.
   - Montrer que: $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_p = 0$.
   - Que peut-on dire de $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$?
   - Montrer que $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base de F.

2. (a) Montrer, pour tout vecteur v de norme 1 appartenant à E_p, l'égalité: $I(v) = {}^tvVv$.

   (b) Déterminer, pour tout i appartenant à $[\![1,p]\!]$, $I(e_i)$ à l'aide des nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$

   (c) On définit les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_r$ de E_p par :

   $$F_1 = F, \quad F_2 = F_1 \cap (D_{e_1}^{\perp}), \ldots, F_r = F_{r-1} \cap (D_{e_{r-1}}^{\perp})$$

   - Montrer que : $\forall i \in [\![1,r]\!],\ F_i = Vect(e_i, \ldots, e_r)$.
   - Montrer que : $I(e_1) = \max\{I(v); v \in E_p \text{ et } \|v\| = 1\} = \max\{I(v); v \in F_1 \text{ et } \|v\| = 1\}$.
   - Montrer que : $\forall i \in [\![1,r]\!], I(e_i) = \max\{I(v); v \in F_i \text{ et } \|v\| = 1\}$.

3. Soit w un vecteur unitaire de E_p tel que $I(w) = \max\{I(v); v \in E_p \text{ et } \|v\| = 1\}$. Montrer que w appartient à F.

4. On suppose dans cette question que $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ sont r vecteurs de norme 1 appartenant à E_p et que $G_1, \ldots, G_r$ sont r sous-espaces vectoriels de E_p tels que

$$(\mathcal{S}); \quad \begin{cases} G_1 = F \\ \varepsilon_1 \in G_1 \text{ et } I(\varepsilon_1) = \max\{I(v); v \in G_1 \text{ et } \|v\| = 1\} \\ \varepsilon_2 \in G_2 = G_1 \cap (D^{\perp}_{\varepsilon_1}), \text{ et } I(\varepsilon_2) = \max\{I(v); v \in G_2 \text{ et } \|v\| = 1\} \\ \vdots \\ \varepsilon_{r-1} \in G_{r-1} = G_{r-2} \cap (D^{\perp}_{\varepsilon_{r-2}}), \text{ et } I(\varepsilon_{r-1}) = \max\{I(v); v \in G_{r-1} \text{ et } \|v\| = 1\} \\ \varepsilon_r \in G_r = G_{r-1} \cap (D^{\perp}_{\varepsilon_{r-1}}), \text{ et } I(\varepsilon_r) = \max\{I(v); v \in G_r \text{ et } \|v\| = 1\} \end{cases}$$

Les droites vectorielles $D_{\varepsilon_1}, \ldots, D_{\varepsilon_r}$ sont appelées axes principaux d'inertie du nuage.

   (a) Vérifier que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ est une base orthonormale de F et que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r, e_{r+1}, \ldots, e_p)$ est une base orthonormale de E_p.

   (b) Montrer que pour tout couple de vecteurs (v, w) appartenant à E_p :

$$J(v, w) =^t vVw =< v, \Phi_V(w) >$$

   (c) On se donne deux vecteurs v_1 et v_2, unitaires, orthogonaux et appartenant à F.
   Pour tout réel t, on pose $\varphi(t) = I(\cos t\, v_1 + \sin t\, v_2)$.
   - Exprimer $\varphi(t)$ à l'aide de $I(v_1), I(v_2), J(v_1, v_2)$ et t.
   - Montrer que φ est majorée sur $\mathbb{R}$ et qu'elle admet un maximum.
   - On suppose que le maximum de φ est atteint en 0. Montrer que $J(v_1, v_2) = 0$.

   (d)
   - Montrer que pour tout (i, j) appartenant à $[\![1, r]\!]^2$, $J(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ dès que $i \neq j$.
   - Déterminer la forme de la matrice de Φ_V dans la base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r, e_{r+1}, \ldots, e_p)$.
   - En déduire que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, ε_i est un vecteur propre de V associé à λ_i.

5. *Dans le langage des statisticiens les colonnes c_j de X représentent des individus d'une population statistique où p variables statistiques x_i, $(1 \leqslant i \leqslant p)$ ont respectivement pris les valeurs $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$, valeurs fixées de telle sorte que leur moyennes sont nulles, c'est à dire : $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant p$.*
   Calculer la covariance $cov(x_k, x_\ell)$ des variables x_k et x_ℓ lorsque k et ℓ appartiennent à $[\![1, p]\!]$ puis comparer la matrice V et la matrice $(cov(x_k, x_\ell))_{\substack{1\leqslant k\leqslant p \\ 1\leqslant \ell\leqslant p}}$

Partie III : Une décomposition de la matrice X

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ on note Π_i la matrice dans la base canonique de E_p, de la projection orthogonale de E_p sur D_{e_i} ; les vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ ont été définis au **II.**1.a.

1. Montrer que : $\sum_{i=1}^{p} \Pi_i = I_p$, (où I_p est la matrice appartenant à $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls excepté les éléments diagonaux qui valent 1).

2. Déterminer $\Pi_i \Pi_j$ pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

3. Calculer pour tout $i \in [\![r + 1, p]\!]$, $\Pi_i X$ et en déduire que : $X = \sum_{i=1}^{r} \Pi_i X$.

4. Pour tout $s \in [\![1, r]\!]$, on pose $X_s = \sum_{i=1}^{s} \Pi_i X$.

   (a) Montrer que : $\operatorname{Im} \Phi_{X_s} \subset Vect(e_1, \ldots, e_s)$.

   (b) Calculer $X_s\, {}^tX e_j$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ et déterminer le rang de X_s.

Partie IV : Une norme euclidienne de matrices carrées

Pour tout entier naturel q non nul et toute matrice, carrée $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ appartenant à $\mathfrak{M}_q(\mathbb{R})$, on pose $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{q} a_{ii}$.

On sait que tr *définit une application linéaire de $\mathfrak{M}_q(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et que si A et B appartiennent respectivement à $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ alors* $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. *On sait également que si deux matrices A et B sont semblables alors* $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Pour tout M et N appartenant à $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ on pose : $\Theta(M, N) = \operatorname{tr}(M\ {}^tN)$.

1. Montrer que $(M, N) \mapsto \Theta(M, N)$ est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.
   Pour toute matrice M appartenant à $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on note $\| |M| \| = \sqrt{\operatorname{tr}(M^tM)}$, appelé ici norme euclidienne de M.

2. Calculer pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $\Theta(\Pi_i X, \Pi_j X)$. On distinguera les cas $i = j$ et $i \neq j$, et on exprimera les résultats en fonction des nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

3. Calculer $\||X - X_s|\|^2$ en fonction de $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, pour tout s appartenant à $[\![1, r]\!]$.

Partie V : La meilleure approximation du nuage

On rappelle que si H_1 et H_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E_p, alors :

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$$

On considère un entier naturel s appartenant à $[\![1, r-1]\!]$ et une matrice N appartenant à $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg}(N) \leqslant s$.

1. Justifier rapidement l'existence d'une base orthonormale $(a_1, \ldots, a_p)$ de E_p formée de vecteurs propres de $(X - N)\ {}^t(X - N)$. On note $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ les valeurs propres de $(X - N)\ {}^t(X - N)$ associées respectivement aux vecteurs $a_1, \ldots, a_p$ et on suppose que $\gamma_1 \geqslant \cdots \geqslant \gamma_p$.

2. Soit i un entier appartenant à $[\![1, r-s]\!]$ et G un sous-espace de E_p de dimension supérieure ou égale à i.
   (a) Montrer que: $\dim(G \cap Vect(a_i, \ldots, a_p)) \geqslant 1$.
   (b) En déduire qu'il existe un vecteur unitaire u appartenant à G tel que $\left\|{}^t(X - N)u\right\|^2 \leqslant \gamma_i$.
   (c) On considère l'espace vectoriel $H = (\ker \Phi_{{}^tN}) \cap Vect(e_1, \ldots, e_{s+i})$.
   - Montrer que : $\dim H \geqslant i$.
   - En déduire : $\lambda_{s+i} \leqslant \gamma_i$.

3. (a) Montrer que : $\||X - N|\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i$.
   (b) En déduire que : $\||X - N|\|^2 \geqslant \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i$.
   (c) En déduire que X_s réalise la meilleure approximation de X par des matrices de rang inférieur ou égal à s au sens de la norme euclidienne définie plus haut sur $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

4. Soit G un sous-espace vectoriel de E_p. On note P_G la projection orthogonale de E_p sur G, Π_G sa matrice dans la base canonique de E_p et $K(G) = \sum_{j=1}^{n} \left\|P_G(c_j)^2\right\|$.
   La quantité $K(G)$ s'appelle l'inertie du nuage X sur le sous-espace G, et dans le cas où $G = E_p$, $K(G)$ est l'inertie totale du nuage X.
   (a) Montrer que : $K(G) = \||\Pi_G X|\|^2$.

(b) Montrer que : $K(G) = |||X|||^2 - |||X - \Pi_G X|||^2$.

(c) On suppose toujours que s est un entier appartenant à $[\![1, r-1]\!]$ et $\dim G \leqslant s$.

- Montrer que : $K(G) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i$.
- Montrer que $K(Vect(e_1, \ldots, e_s))$ est le maximum des nombres $K(G)$, lorsque G parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E_p dont la dimension est inférieure ou égale à s.

(d) On suppose dans cette question que s appartient à $[\![1, p]\!]$, on ne suppose donc plus que $s \leqslant r-1$. Montrer que $K(Vect(e_1, \ldots, e_s))$ est le maximum des nombres $K(G)$, lorsque G parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E_p dont la dimension est inférieure ou égale à s.

Partie VI : Non multa, sed multum

Dans cette partie, on propose une interprétation pratique des résultats théoriques précédents à propos d'une enquête de consommations.

On a étudié les "consommations" annuelles de 8 denrées alimentaires (ce sont les 8 variables statistiques x_i, $(1 \leqslant i \leqslant 8)$ que l'on suppose centrées), par différentes catégories socio-professionnelles, à savoir : celles des exploitants agricoles (AGRI) représentées par la colonne c_1, des salariés agricoles (SAAG($= c_2$)) , des professions indépendantes (PRIN($=c_3$)), les cadres supérieurs (CSUP($= c_4$)), des cadres moyens (CMOY($= c_5$)), des employés (EMP($= c_6$)), des ouvriers (OUV($= c_7$)), des inactifs (INAC($= c_8$)). Dans notre exemple un individu est donc une catégorie socio-professionnelle.

On a consigné les résultats de l'enquête dans une matrice $X = (x_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 8 \\ 1 \leqslant j \leqslant 8}}$. Par exemple x_{12} représente la consommation moyenne de la denrée 1 par la catégorie SAAG.

Les valeurs propres de la matrice $V = X\ {}^tX$ sont approximativement $70, 20, 5, 3, 2, 0, 0$ et 0 associées respectivement à $e_1, \ldots, e_8$.

1. Quelle part de l'inertie totale est contenue dans l'inertie du nuage de points sur le sous-espace de base (e_1, e_2). On a représenté dans le dessin ci-contre les projetés orthogonaux dans le plan de base (e_1, e_2) des 8 individus $(c_j)_{1 \leqslant j \leqslant 8}$, c'est-à-dire des 8 colonnes représentant les consommations moyennes de chaque catégorie socio-professionnelle.

2. Que représente le nuage de points du dessin pour le nuage X de l'enquête ?