CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Année 2001

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
On dispose de n jetons numérotés de 1 à n. On tire, au hasard et sans remise, les jetons un à un. La suite $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ des numéros tirés est aussi appelée permutation de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.
Etant donné deux entiers k et p vérifiant $1 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$, la suite $(a_k, \dots, a_p)$ se réduisant à (a_k) dans le cas où k est égal à p — est appelée sous-suite de $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et son nombre d'éléments est appelé longueur de cette sous-suite.
On admettra que cette expérience aléatoire peut être modélisée par la donnée de l'univers Ω, ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$, muni de la tribu de ses parties $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme $\mathbf{P}$, ce qui signifie que, pour toute permutation ω de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a : $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{n!}$
Si X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$, on note $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.
Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$, on note $\mathrm{Cov}(X, Y)$ leur covariance.

Préliminaire

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{1, 2, \dots, m\}$ où m est un entier supérieur ou égal à 2.

Montrer l'égalité : $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{m} \mathbf{P}([X \geqslant k])$.

Partie A : Première sous-suite croissante

Etant donné une permutation $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\{1, 2, \dots, n\}$, la première sous-suite croissante est définie de la façon suivante : dans le cas $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, la première sous-suite croissante est $(a_1, a_2, \dots, a_n)$; dans le cas contraire, k étant le plus petit entier de $\{1, \dots, n-1\}$ vérifiant $a_k > a_{k+1}$, la première sous-suite croissante est $(a_1, \dots, a_k)$.
Soit L la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ qui, à toute permutation ω, associe la longueur de sa première sous-suite croissante.
Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, comme $2 < 3 < 5$ et $5 > 4$, on a : $L(\omega) = 3$.

1. (a) Quelles sont la plus petite et la plus grande des valeurs prises par L ? Que vaut $\mathbf{P}([L = n])$?
   (b) Montrer que, pour tout entier k de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a : $\mathbf{P}([L \geqslant k]) = \dfrac{1}{k!}$. En déduire la loi de L.
2. Donner la valeur de $\mathrm{E}(L)$ sous forme d'une somme et déterminer la limite de $\mathrm{E}(L)$ quand n tend vers l'infini.

Partie B : Deuxième sous-suite croissante

Etant donné une permutation $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\{1, 2, \dots, n\}$ et sa première sous-suite croissante $(a_1, \dots, a_k)$; si celle-ci se termine par a_n (i.e. si $k = n$), on dit que la deuxième sous-suite croissante n'existe pas; dans le cas contraire, la première sous-suite croissante de $(a_{k+1}, \dots, a_n)$ est appelée deuxième sous-suite croissante de $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.
Soit L' la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ qui, à toute permutation ω, associe 0 s'il n'existe pas de deuxième sous-suite croissante, et la longueur de la deuxième sous-suite croissante, dans le cas contraire.
Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, la deuxième sous-suite croissante est $(4, 9)$ et l'on a : $L'(\omega) = 2$.

1. Quelles sont la plus petite et la plus grande des valeurs prises par L'? Que vaut $\mathbf{P}([L' = 0])$?
2. On suppose, dans cette question seulement, que n est égal à 3.
   (a) Montrer que la loi du couple (L, L') est donnée par le tableau suivant :

$L \backslash L'$	1
0	0
1	1/6
2	1/3

   (b) Donner la loi de L' et calculer son espérance.
   (c) Calculer la covariance de L et de L'. Pouvait-on prévoir le signe de cette covariance?
3. On suppose à nouveau que n est un entier quelconque supérieur ou égal à 2.
   (a) Dénombrer les parties de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ distinctes de $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, \dots, n-1\}$.
   (b) En déduire $\mathbf{P}([L + L' = n])$.
   (c) Montrer de même que, pour tout entier k de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a : $\mathbf{P}([L + L' \geqslant k]) = \dfrac{2^k - k}{k!}$
   (d) Donner la valeur de $\mathrm{E}(L + L')$ sous forme d'une somme.
   (e) En déduire $\mathrm{E}(L')$ et sa limite quand n tend vers l'infini.

Partie C : Nombre de sous-suites croissantes

Etant donné une permutation $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\{1, 2, \dots, n\}$, si sa deuxième sous-suite croissante existe et ne se termine pas par a_n, on définit la troisième sous-suite croissante à l'instar de la deuxième, etc., jusqu'à ce que l'on ait défini une sous-suite croissante se terminant par a_n.
Soit T la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ qui, à toute permutation ω, associe le nombre de ses sous-suites croissantes.
Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, comme les sous-suites croissantes sont $(2, 3, 5), (4, 9),(6, 7, 8)$ et (1), on a : $T(\omega) = 4$.

1. (a) Donner la loi de T dans le cas où n vaut 2. Calculer son espérance et sa variance.
   (b) Donner la loi de T dans le cas où n vaut 3. Calculer son espérance et sa variance.

2. On suppose désormais l'entier n supérieur ou égal à 4.

   (a) Calculer $\mathbf{P}([T = 1])$ et $\mathbf{P}([T = n])$.
   (b) Comparer les événements $[L + L' = n]$ et $[T \leqslant 2]$. En déduire la valeur de $\mathbf{P}([T = 2])$.
   (c) Donner la loi de T dans le cas où n vaut 4. Calculer son espérance et sa variance.

3. Pour tout entier i de $\{1, 2, \dots, n-1\}$, soit A_i l'événement égal à l'ensemble des permutations $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vérifiant $a_i > a_{i+1}$, et soit X_i la variable aléatoire qui, à toute permutation ω, associe 1 si $\omega \in A_i$ et 0 sinon.

   (a) Montrer que X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$Donner son espérance et sa variance.
   (b) Donner une expression de T en fonction de X_i. En déduire l'égalité : $\mathrm{E}(T) = \frac{n+1}{2}$
   (c) Montrer que l'on a : $\forall i \in \{1, \dots, n-2\}$, $\mathbf{P}(A_i \cap A_{i+1}) = \frac{1}{6}$En déduire la valeur de $\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+1})$
   (d) Montrer que, pour tout couple (i, j) d'entiers vérifiant $1 \leqslant i < i + 2 \leqslant j \leqslant n - 1$, les événements A_i et A_j sont indépendants.
   En déduire l'égalité : $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$.
   (e) Etablir enfin l'égalité : $\mathrm{V}(T) = \frac{n+1}{12}$

4. On suppose maintenant que n est égal à 5. On considère 1000 variables aléatoires $T_1, \dots, T_{1000}$, mutuellement indépendantes, de même loi que la variable T et on note S la variable aléatoire égale à $\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} T_i$.
   On note ϕ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et on donne la valeur approchée suivante : $\phi(\sqrt{5}) \simeq 0,987$.
   Calculer une valeur approchée de la probabilité $\mathbf{P}([2,95 < S < 3,05])$.

Partie D : Simulation informatique

Dans le langage informatique PASCAL, la fonction **random** renvoie, pour un argument m de type **integer** vérifiant $m \geqslant 1$, un nombre entier aléatoire compris entre 0 et $m-1$ (cette fonction est initialisée au début du corps principal du programme par la procédure **randomize**).
On rappelle que, dans l'exécution d'une boucle **for** `i:=n` **downto** 2, `i` prend successivement les valeurs $n, n-1, \ldots, 2$.
Dans un programme écrit en PASCAL, figurent la déclaration **type** `tableau` = **array** [1..5] **of integer;** et la procédure :

```
procedure aleatoire(var A:tableau);
var aux,i,alea :integer ;
begin
for i:=1 to 5 do
            A[i]:=i;
for i:=5 downto 2 do
               begin
                  alea:= random(i)+1;
                  aux:=A[alea];
                  A[alea]:=A[i];
                  A[i]:=aux;
               end;
end;
```

1. (a) On suppose que les valeurs successives de `alea` sont $4, 2, 3$ et 2. Donner les valeurs de `A[1]`, `A[2]`, `A[3]`, `A[4]` et `A[5]` à la fin de l'exécution de la procédure.

   (b) Quelles valeurs successives doit prendre `alea` pour obtenir, à la fin de l'exécution de la procédure le tableau : `A[1]=3`, `A[2]=5`, `A[3]=2`, `A[4]=4`, `A[5]=1`?

   (c) Expliquer pourquoi la procédure ci-dessus permet de simuler l'expérience aléatoire définie au début du problème.

2. Ecrire une fonction d'en-tête **function** `T(A:tableau):`**integer**; quirenvoie le nombre de sous-suites croissantes du tableau `A` correspondant à une permutation de $\{1, \ldots, 5\}$.

3. On suppose que le programme contient les déclarations **var** `A:tableau;` **var** `k:`**integer**; **var** `S:`**real**; et que le corps principal du programme est le suivant :

```
begin
randomize;
S:=0;
for k :=1 to 1000 do
               aleatoire(A);
               S:=S+T(A);
               end ;
S:=S/1000;
writeln(S);
end.
```

Après exécution du programme la valeur affichée de `S` est $2,98$. Ce résultat est-il étonnant?