CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Année 2000

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Ce problème a pour objet l'étude des points en lesquels une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ atteint son maximum sur l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations linéaires.
Pour tout entier p strictement positif, on identifiera $\mathbb{R}^p$ et $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Partie I : Préliminaires

On dit qu'une partie K non vide de $\mathbb{R}$ est majorée lorsqu'il existe un réel M tel que

$$\forall x \in K, \quad x \leqslant M$$

Un réel M vérifiant ces inégalités s'appelle un majorant de K; on dit aussi que M majore K.
Dans ce qui suit on suppose que K est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit M un majorant de K et a un élément de K. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = a \\ v_0 = M \end{array}\right. \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_{n+1}, v_{n+1}) = \left\{\begin{array}{ll} \left(\dfrac{u_n+v_n}{2}, v_n\right) & \text{si } \dfrac{u_n+v_n}{2} \text{ ne majore pas } K \\ \left(u_n, \dfrac{u_n+v_n}{2}\right) & \text{sinon} \end{array}\right.$$

1. On suppose, dans cette question seulement, que $K = [0,1[\cup[3,4[$, $a = 0$ et que $M = 10$.
   Déterminer (u_n, v_n) pour tout entier n appartenant à $\{1,2,3,4\}$.

2. On revient désormais au cas général.

(a) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$.

(b) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers un réel b.

(c) Montrer que pour tout entier positif n, v_n est un majorant de K, puis que b majore K.

(d) Montrer qu'il existe une suite d'éléments de K qui converge vers b.

(e) On suppose que b' est un majorant de K.

- Montrer que $b' \geqslant b$.
- En déduire que b ne dépend pas des choix initiaux de a et M pourvu que a appartienne à K et que M majore K.

Désormais, on notera α_K le majorant b de K ainsi obtenu.

Partie II : Etude d'un exemple

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne définie par $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ pour tout (x,y) appartenant à $\mathbb{R}^2$.

1. On considère trois nombres réels a, b, c, tels que $(a,b) \neq (0,0)$. On définit alors les trois ensembles:

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ ax+by+c=0\}$$

$$\mathcal{R}_+ = (x,y)\in \mathbb{R}^2; ax+by+c>0 \text{ et } \mathcal{R}_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ ax+by+c<0\}$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}_+$ est une partie ouverte de R^2.
On pourra montrer, en utilisant la continuité de $(x,y) \mapsto ax+by+c$ en un point (x_0,y_0) appartenant à $\mathcal{R}_+$, qu'il existe une boule ouverte centrée en (x_0,y_0) et incluse dans $\mathcal{R}_+$.
Il s'ensuit, mutatis mutandis, que R_- est également une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, ce que l'on admettra.

(b) Soit (x,y) et (x',y') deux éléments de $\mathcal{R}_+$. Montrer que, pour tout réel λ appartenant à $[0,1]$, le couple $(\lambda x+(1-\lambda)x', \lambda y+(1-\lambda)y')$ appartient à $\mathcal{R}_+$.

(c) On suppose que (x,y) et (x',y') appartiennent respectivement à $\mathcal{R}_+$ et $\mathcal{R}_-$.
En considérant la fonction $\lambda \mapsto a(\lambda x+(1-\lambda)x')+b(\lambda y+(1-\lambda)y')+c$, montrer qu'il existe λ dans $[0,1]$ tel que $(\lambda x+(1-\lambda)x', \lambda y+(1-\lambda)y')$ appartient à $\mathcal{D}$.

2. Soit k un entier strictement positif. On considère des parties non vides et ouvertes de $\mathbb{R}^2$: $A_1, \ldots, A_k$.

(a) On suppose dans cette sous-question que $A_1 \cap \cdots \cap A_k$ est non vide.
Montrer que $A_1 \cap \cdots \cap A_k$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
Si (x_0,y_0) est un élément de $A_1 \cap \cdots \cap A_k$, on montrera qu'il existe un réel r strictement positif tel que la boule de centre (x_0,y_0) et de rayon r soit incluse dans $A_1 \cap \cdots \cap A_k$.

(b) Montrer que $A_1 \cup \cdots \cup A_k$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

3. On note Δ l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geqslant 0, y \geqslant 0,\quad 1-2x+y \geqslant 0 \text{ et } 1+x-2y \geqslant 0\}$ et g l'application définie sur Δ par

$$\forall (x,y) \in \Delta,\ g(x,y) = 3x-y+4$$

(a) Représenter graphiquement Δ dans un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

(b) Montrer que Δ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.

(c) Montrer que g admet un maximum sur Δ.

(d) Ce maximum peut-il être atteint en un point de l'ensemble Δ' défini par

$$\Delta' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x>0, y>0,\quad 1-2x+y>0 \text{ et } 1+x-2y>0\}$$

(e) Déterminer l'ensemble des points de Δ où ce maximum est atteint.

4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   On note $\mathcal{C}$ l'ensemble $\{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0 \text{ et } AX = B\}$.

   (a) Montrer que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si x_1, x_2, x_3, x_4 satisfont:

   $$x_3 = 1 - 2x_1 + x_2,\ x_4 = 1 + x_1 - 2x_2,\ (x_1, x_2) \in \Delta$$

   (b) On considère l'élément $W = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathbb{R}^4$.

   On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique: $< X, Y >= {}^tXY$. On considère également la fonction f définie sur $\mathcal{C}$ par:

   $$\forall X \in \mathcal{C},\ f(X) = < X, W >$$

   - Montrer que $f(X) = g(x_1, x_2)$ pour tout élément $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{C}$.
   - Déterminer l'ensemble des points en lesquels f atteint son maximum sur $\mathcal{C}$.

Partie III : Sommets et maximum

Désormais n et p désigneront des entiers strictement positifs.
On considère une matrice A appartenant à $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et deux matrices colonnes B et W appartenant respectivement à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.
Pour tout élément X de $\mathbb{R}^p$ et pour tout i appartenant à $[\![1, p]\!]$, nous noterons X_i sa i-ième composante, et ainsi $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$.
On dira qu'un élément X de $\mathbb{R}^p$ est positif et on écrira $X \geqslant 0$, lorsque toutes ses composantes sont positives.
On munit $\mathbb{R}^p$ de son produit scalaire canonique: $< X, Y >= {}^tXY$.
On considère l'ensemble $C = \{X \in \mathbb{R}^p;\ X \geqslant 0 \text{ et } AX = B\}$ et l'application f définie sur C par

$$\forall X \in \mathcal{C},\ f(X) = < X, W >$$

On dit qu'un élément Z de C est un sommet de C lorsque

$$\forall (Z', Z'') \in \mathcal{C}^2, \forall \lambda \in]0, 1[,\ (Z = \lambda Z' + (1 - \lambda) Z'') \Longrightarrow (Z' = Z'')$$

Si $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathbb{R}^p$, on notera $s(X)$ l'ensemble $\{i \in [\![1, p]\!];\quad X_i \neq 0\}$; cet ensemble sera appelé le support de X.
Enfin, on notera $C^1, C^2, \ldots, C^p$ les colonnes de A.
Toutes ces notations seront utilisées jusqu'à la fin du problème.

1. Vérifier que si l'élément nul de $\mathbb{R}^p$ appartient à $\mathcal{C}$, alors il est un sommet de $\mathcal{C}$.

2. On revient au cas général et on suppose dans ce qui suit que $\mathcal{C}$ est non vide et que f atteint son maximum sur $\mathcal{C}$ en U. Ce maximum sera noté M_0. Le but de ce qui va suivre est de construire un sommet de $\mathcal{C}$ en lequel f atteint son maximum. On suppose donc que U n'est pas un sommet de $\mathcal{C}$ et on considère deux éléments distincts U', U'' appartenant à $\mathcal{C}$ et un réel λ appartenant à $]0,1[$ tels que $U = \lambda U' + (1-\lambda)U''$.

   (a) Vérifier que $f(U') = f(U'') = f(U)$ et en déduire que le vecteur $V = U'' - U'$ est orthogonal à W.
   Le vecteur $U'' - U'$ étant non nul, il a au moins une composante non nulle et quitte à échanger U' et U'' on peut supposer que le vecteur V égal à $U'' - U'$ admet une composante strictement négative. C'est ce que nous supposons désormais.

   (b)
   - Montrer que $s(U') \subset s(U)$, $s(U'') \subset s(U)$ et $s(V) \subset s(U)$.
   - Pour tout réel μ, calculer: $A(U + \mu V)$.
   - Montrer que $s(U + \mu V) \subset s(U)$ pour tout réel μ.

   (c) Montrer que la famille $(C^i)_{i \in s(U)}$ est liée. *On pourra considérer AV.*

   (d) On considère $K = \{\mu \in \mathbb{R};\ U + \mu V \in \mathcal{C}\}$.
   - Montrer que K est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
   - Montrer que $U + \alpha_K V$ appartient à $\mathcal{C}$ et que $f(U + \alpha_K V) = M_0$.

   *Le nombre α_K a été défini dans la **partie I**.*

   (e) On suppose que, pour tout i appartenant à $s(U)$, la i-ième composante Y_i de la colonne Y égale à $U + \alpha_K V$ est non nulle.
   En remarquant que pour tout i appartenant à $s(U)$, $\lim\limits_{\mu \to 0^+} (U_i + (\alpha_K + \mu)V_i) = U_i + \alpha_K V_i$, justifier l'existence d'un réel η, strictement positif, tel que $U + (\alpha_K + \eta)V$ appartienne à $\mathcal{C}$.
   En déduire que $s(U + \alpha_K V)$ est strictement inclus dans $s(U)$.

   (f) Nous noterons désormais $U^{(1)} = U + \alpha_K V$ et nous supposons que $U^{(1)}$ n'est pas un sommet de $\mathcal{C}$.
   En se servant des questions précédentes, montrer que l'on peut construire un élément $U^{(2)}$ de $\mathcal{C}$ tel que $f(U^{(2)}) = M_0$ et tel que $s(U^{(2)})$ soit strictement inclus dans $s(U^{(1)})$.

   (g) Déduire de ce qui précède l'existence d'un sommet de $\mathcal{C}$ en lequel f atteint son maximum sur $\mathcal{C}$.

Partie IV : Existence du maximum de la fonction f

Dans cette partie nous reprenons les mêmes notations que dans la partie précédente et nous noterons par $< X, X' >$ aussi bien le produit scalaire canonique de deux vecteurs X et X' de $\mathbb{R}^p$, que le produit scalaire canonique de deux vecteurs X et X' de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe une matrice A' appartenant à $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que:

$$\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, \quad < AX, Y > = < X, A'Y >$$

2. On note r le rang de la matrice A. On suppose d'une part que r est non nul, et d'autre part que la famille $(C^1, C^2, \ldots, C^r)$ est libre.
   On note E l'espace vectoriel engendré par les colonnes $C^1, C^2, \ldots, C^p$ de A.

   (a) Montrer que l'application $\theta : Y \longmapsto \begin{pmatrix} < Y, C^1 > \\ \vdots \\ < Y, C^r > \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^r$.

   (b) Montrer qu'il existe un unique vecteur colonne Z appartenant à E tel que, pour tout i appartenant à $[\![1, r]\!]$, on a $< Z, C^i > = W_i$. On rappelle que W_i représente la i-ième composante du vecteur W introduit dans le préambule de la partie III.

   (c) Exprimer les composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ du vecteur colonne $A'Z$, à l'aide des produits scalaires $< Z, C^i >$, $(i = 1, \ldots, p)$.

(d) Dans cette sous-question on suppose en outre que: $\forall i \in [\![r+1, p]\!], \quad < Z, C^i > \geqslant W_i$.

- Soit X un élément appartenant à $\mathcal{C}$, montrer que $< Z, B > \geqslant < X, W >$.
- On suppose qu'il existe un vecteur U appartenant à $\mathcal{C}$ tel que $s(U) = [\![1, r]\!]$.

Prouver que la fonction $f : X \mapsto < X, W >$ atteint son maximum sur $\mathcal{C}$ en U et que U est un sommet de $\mathcal{C}$.

3. Dans cette question A et W sont respectivement la matrice et le vecteur introduits dans la **partie II**.

(a) Déterminer la valeur de r.

(b) Déterminer le vecteur Z.

(c) Est-ce que $A'Z - W \geqslant 0$?

(d) Retrouve-t-on les résultats de la partie II ?