CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
**DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT**
Direction des Admissions et concours

---

# ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
# E.S.C.P.-E.A.P.
# ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

---

**OPTION ECONOMIQUE**

## MATHEMATIQUES III

**Année 1997**

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*
*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

## EXERCICE I

1. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(e_1, e_2, e_3)$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que $-1$ est une valeur propre de $A$ et trouver un vecteur propre, noté $V$, associé à cette valeur propre.

   (b) Montrer que $(V, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de $f$ dans cette base.

   (c) Montrer que si $X$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$, alors $f(X)$ est une combinaison linéaire de $X$ et de $V$. En déduire que, dans toute base de $\mathbb{R}^3$ de la forme $(V, V_2, V_3)$ où $V_2$ et $V_3$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ , la matrice de $f$ est la forme :

$$\begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   où $a$ et $b$ sont des réels.

2. L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

3. Plus généralement, soit $U_1$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ et h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant la propriété suivante :
   $(P)$ : Pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, $h(X)$ est une combinaison linéaire de $X$ et de $U_1$.
   Soit $(U_1, U_2, U_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ obtenue en adjoignant à $U_1$ deux autres vecteurs $U_2$ et $U_3$.

   (a) En appliquant la propriété $(P)$ à trois vecteurs particuliers, montrer qu'il existe des réels $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tels que :
   $$h(U_2) = \alpha U_1 + \gamma U_2 \quad \text{et} \quad h(U_3) = \beta U_1 + \gamma U_3.$$

   (b) En déduire que la matrice de h dans la base $(U_1, U_2, U_3)$ est de la forme
   $$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$
   où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\lambda$ sont des réels.

   (c) L'endomorphisme $h$ est-il diagonalisable ?

# EXERCICE II

1. Montrer que, si $g$ est une fonction réelle définie sur$[0, 1]$, continue et positive sur cet intervalle, la fonction $h$, définie par $h(x) = 2\int\limits_0^x \sqrt{g(t)}dt$, est aussi une fonction continue et positive sur $[0, 1]$.

2. Compte tenu du résultat précédent, on définit sur $[0, 1]$ une suite de fonctions réelles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $x \in [0, 1]$,
   $$f_0(x) = 1, \quad \text{et pour tout } n \geqslant 1, \quad f_n(x) = 2\int\limits_0^x \sqrt{f_{n-1}(t)}dt$$
   Calculer $f_1$, $f_2$ et $f_3$.

3. Montrer qu'il existe deux suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $x \in [0, 1]$, on ait : $f_n(x) = a_n x^{b_n}$.
   On calculera $b_n$ en fonction de $n$ et on écrira une relation de récurrence donnant $a_n$ en fonction de $a_{n-1}$.

4. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $2^n \ln(a_n) = -\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k \ln(1 - 2^{-k})$.

5. (a) Montrer que, pour tout$x \in [0, 1[$, on a : $0 \leqslant -\ln(1-x) - x \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{x^2}{1-x}$

   (b) En déduire que, pour tout $k \geqslant 1$, $\left|-2^k \ln(1 - 2^{-k}) - 1\right| \leqslant 2^{-k}$

   (c) Montrer que $\ln(a_n)$ est équivalent à $\dfrac{n}{2^n}$quand $n$ tend vers l'infini.

6. Montrer que, pour tout réel $x \in [0, 1]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite en fonction de $x$.

# EXERCICE III

Un pion est déplacé de manière aléatoire sur un damier de quatre cases numérotées de 1 à 4. On considère une suite de variables aléatoires, $(X_n)_{n\geqslant 0}$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, A, P)$, à valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, représentant la position du pion aux instants successifs : pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a $X_n = i$ si le pion est sur la case $i$ à l'instant $n$.
On note $\pi_{ij}$ l'élément situé à la i-ème ligne et à la j-ième colonne de la matrice

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $i$ et $j$ dans $\{1,2,3,4\}$, on suppose que, pour tout $n \geqslant 0$ tel que $P(X_n = i) \neq 0$, la probabilité conditionnelle $P(X_{n+1} = j/X_n = i)$ (probabilité que le pion soit sur la case $j$ à l'instant $n+1$ sachant qu'il est sur la case $i$ à l'instant $n$) est égale à $\pi_{ij}$.
On note, pour tout $n \geqslant 0$,

$$p_n = P(X_n = 1), \quad q_n = P(X_n = 2), \quad r_n = P(X_n = 3), \quad s_n = P(X_n = 4).$$

Enfin on suppose que le pion est sur la case 1 à l'instant $n = 0$ et donc que $p_0 = 1$. Si le pion vient sur la case 4 à l'instant $n > 0$, il y reste à l'instant $n+1$, d'où la quatrième ligne de la matrice $\Pi$.

1. Calculer $p_1, q_1, r_l, s_1$ et $p_2, q_2, r_2, s_2$.

2. (a) Donner, pour tout entier $n \geqslant 0$, l'expression de $p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}, s_{n+1}$ en fonction de $p_n, q_n, r_n, s_n$.
   (b) En déduire, pour $n \geqslant 1$, les expressions de $p_n, q_n, r_n$ et $s_n$ en fonction de $n$.

3. (a) Calculer, pour $n \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P(X_{n+l} = 4/X_n \neq 4)$.
   (b) Déterminer, pour tout entier $n \geqslant 1$, la probabilité que le pion passe par la case 4, pour la première fois, à l'instant n. On notera $t_n$ cette probabilité.
   (c) Déterminer la probabilité qu'il ne passe jamais par la case 4.
   (d) Soit T une variable aléatoire définie sur $(\Omega, A, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}^\times$ et vérifiant, pour tout entier $n \geqslant 1$, $P(T = n) = t_n$.
   Calculer l'espérance et la variance de $T$.

4. Calculer la probabilité que le pion ne passe jamais ni par la case 2 ni par la case 3.

5. (a) Déterminer la probabilité que le pion se soit trouvé sur la case 1 à l'instant $n = 1$, sachant qu'il est sur la case 4 à l'instant $n = 2$.
   (b) Plus généralement, soit m et n deux entiers vérifiant $0 < m < n$. Déterminer la probabilité que le pion se soit trouvé sur la case 1 à l'instant $m$, sachant qu'il est sur la case 4 à l'instant $n$.