CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Année 1996

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel donné supérieur ou égal à 2 et par f une application de classe C^{2n} du segment $[-1;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On se propose d'établir une méthode de calcul approché de l'intégrale $\mathcal{I}(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\, dt$.

Dans la **partie I.** , on étudie le polynôme $P_n(x) = (x^2-1)^n$, ses dérivées $P_n^{(j)}$ et notamment sa dérivée $n^{\text{ème}}$: $P_n^{(n)}$.
La partie **II** propose l'étude de deux procédés d'interpolation polynomiale de la fonction f. Le premier permet de définir la méthode utilisée pour le calcul approché de $\mathcal{I}(f)$, le second de majorer l'erreur commise.

Partie I

1. **Étude des racines de P_n et de ses dérivées**

   (a) Établir l'existence, pour tout entier naturel j inférieur ou égal à n, d'un polynôme Q_j tel que, pour tout nombre réel x :
   $$\begin{cases} P_n^{(j)}(x) & = (x^2-1)^{n-j}\, Q_j(x) \\ Q_j(-1) & \neq 0 \quad \text{et} \quad Q_j(1) \neq 0 \end{cases}$$
   On pourra raisonner par récurrence sur l'entier j et on précisera l'expression de Q_{j+1} en fonction de Q_j pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$
   En déduire les valeurs en -1 et 1 de P_n et de ses dérivées d'ordre j strictement inférieur à n.

(b) À l'aide du théorème de Rolle, dont on rappellera l'énoncé précis, montrer que le polynôme P_n' admet au moins une racine dans l'intervalle $]-1;1[$ puis que le polynôme P_n'' admet au moins deux racines distinctes dans l'intervalle $]-1;1[$.
Établir que, pour tout entier naturel j compris entre 1 et n, le polynôme $P_n^{(j)}$ admet au moins j racines distinctes dans l'intervalle $]-1;1[$.

(c) En déduire que le polynôme $P_n^{(n)}$ admet exactement n racines réelles distinctes et que celles-ci appartiennent à l'intervalle $]-1;1[$.

Dans toute la suite du problème, ces racines sont notées r_1, r_2, $\ldots$, r_n avec :

$$-1 < r_1 < r_2 < \ldots < r_n < 1$$

2. **Calcul d'une intégrale auxiliaire**
On pose, pour tout couple (p,q) d'entiers naturels :

$$W(p,q) = \int_{-1}^{1} (t-1)^p (t+1)^q \, dt$$

(a) À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre $W(p+1,q-1)$ et $W(p,q)$ lorsque $q \geqslant 1$.

(b) En déduire que $W(n,n) = (-1)^n \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$

3. **Calcul d'intégrales associées au polynôme P_n et à ses dérivées**
Dans cette question, on désigne par Q un polynôme à coefficients réels.

(a) Établir, à l'aide d'intégrations par parties successives, l'égalité suivante :

$$\int_{-1}^{1} Q(t) P_n^{(n)}(t) \, dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} Q^{(n)}(t) P_n(t) \, dt$$

(b) Quelle est la valeur de l'intégrale $\int_{-1}^{1} Q(t) P_n^{(n)}(t) \, dt$ lorsque Q est de degré strictement inférieur à n ?

(c) Expliciter $P_n^{(2n)}$ puis exprimer $\int_{-1}^{1} \left(P_n^{(n)}(t)\right)^2 \, dt$ en fonction de $W(n,n)$ et obtenir ainsi sa valeur.

Partie II

1. **Polynôme d'interpolation de Lagrange de f**
On pose désormais pour tout entier j compris entre 1 et n et pour tout nombre réel x :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - r_i}{r_j - r_i} \qquad \lambda_j = \int_{-1}^{1} L_j(t) \, dt$$

(a) Calculer $L_j(r_i)$ en distinguant suivant que i est, ou non, égal à j.
En déduire que $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est une base de l'espace vectoriel $R_{n-1}[X]$ des polynômes de degré strictement inférieur à n.

(b) Expliciter, dans la base précédente, un polynôme A_n de degré strictement inférieur à n tel que $A_n(r_j) = f(r_j)$ pour tout entier j compris entre 1 et n et prouver qu'un tel polynôme est unique.

(c) Établir l'égalité $\int_{-1}^{1} A_n(t) \, dt = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(r_j)$.

On se propose désormais de prendre pour valeur approchée de l'intégrale $\mathcal{I}(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ *l'intégrale* $\mathcal{I}(A_n) = \int_{-1}^{1} A_n(t)\,dt$ *que l'on notera* $\mathcal{I}_n(f)$ *dans la suite du problème.*

En d'autres termes, on prend pour valeur approchée de l'intégrale $\mathcal{I}(f)$ *le nombre réel* $\mathcal{I}_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(r_j)$

2. **Comparaison de $\mathcal{I}(P)$ et de $\mathcal{I}_n(P)$ lorsque P est un polynôme**
   Dans cette question, on suppose que P est un polynôme dont le degré est noté $\deg(P)$.
   Par convention le degré du polynôme nul sera posé égal à $-\infty$.

   (a) On suppose que $\deg(P) < n$.
   Comparer $\mathcal{I}(P)$ et $\mathcal{I}_n(P)$.

   (b) On suppose que $\deg(P) < 2n$.
   - Justifier l'existence d'un couple (Q, R) de polynômes tel que l'on ait :
   $$P = Q\, P_n^{(n)} + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < n$$
   - Montrer que $\deg(Q) < n$
   - Déduire des résultats de la partie I. que $\mathcal{I}(P) = \mathcal{I}(R)$.
   - Comparer $\mathcal{I}_n(R)$ et $\mathcal{I}_n(P)$ puis $\mathcal{I}(P)$ et $\mathcal{I}_n(P)$.

3. **Polynôme d'interpolation de Hermite de f.**

   (a) À tout polynôme H de l'espace vectoriel $\mathcal{R}_{2n-1}[X]$ des polynômes de degré strictement inférieur à $2n$, on associe l'élément
   $\varphi(H) = (H(r_1), H'(r_1), H(r_2), H'(r_2), \dots, H(r_n), H'(r_n))$ de $\mathcal{R}^{2n}$.
   Établir que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ et déterminer son noyau.
   On rappelle qu'un polynôme non nul de degré d admet au plus d racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

   (b) En déduire qu'il existe un polynôme B_n de degré strictement inférieur à $2n$ et un seul tel que $B_n(r_j) = f(r_j)$ et $B_n'(r_j) = f'(r_j)$ pour tout entier j compris entre 1 et n.

   (c) Déduire des résultats précédents que $\mathcal{I}(B_n) = \mathcal{I}_n(B_n)$ puis enfin que $\mathcal{I}(B_n) = \mathcal{I}_n(f)$.

4. **Majoration de $|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f)|$.**
   Soit $M_{2n}(f)$ le maximum (dont on justifiera l'existence) de $\left|f^{(2n)}(t)\right|$ lorsque t décrit le segment $[-1; 1]$.

   (a) Dans cette question, on désigne par x un nombre réel donné appartenant au segment $[-1; 1]$ et distinct des nombres $r_1, r_2, \dots, r_n$.
   On envisage alors l'application g_x définie sur $[-1; 1]$ par
   $$g_x(t) = f(t) - B_n(t) - \alpha \left(P_n^{(n)}(t)\right)^2$$
   où α est le nombre réel (dont on justifiera l'existence) tel que $g_x(x) = 0$.
   - Calculer $g_x'(r_1)$, $g_x'(r_2)$, $\dots$, $g_x'(r_n)$.
   - En appliquant le théorème de Rolle à l'application g_x sur des intervalles convenables, prouver que g_x' s'annule en au moins n points de $]-1; 1[$ distincts de r_1, r_2, $\dots$, r_n.
   - Établir que $g_x^{(2n)}$ s'annule en au moins un point c appartenant au segment $[-1; 1]$.
   - Expliciter $g_x^{(2n)}(t)$ et en déduire une expression de α en fonction de $f^{(2n)}(c)$ et de n.
   - À l'aide de l'égalité $g_x(x) = 0$, établir que :
   $$f(x) - B_n(x) = \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} f^{(2n)}(c) \left(P_n^{(n)}(x)\right)^2$$

(b) Prouver que, pour tout réel x de $[-1;1]$:

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} M_{2n}(f) \ \left(P_n^{(n)}(x)\right)^2$$

On distinguera deux cas suivant que x est, ou non, égal à l'un des nombres réels r_1, r_2, ..., r_n.
Déduire alors des résultats des parties I. et II. que :

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f)| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{(C_{2n}^n)^2} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(c) On considère dans cette question une application g à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie et de classe C^{2n} sur un segment $[a,b]$. On désigne par $M_{2n}(g)$ le maximum de $\left|g^{(2n)}(u)\right|$ lorsque u décrit le segment $[a,b]$.
En envisageant l'application f définie sur $[-1,1]$ par $f(t) = g(\frac{a+b}{2} + t\,\frac{b-a}{2})$, donner en fonction de a, b, n et $M_{2n}(g)$ un majorant de l'expression suivante :

$$\left| \int_a^b g(u)\,du - \frac{b-a}{2} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j g(\frac{a+b}{2} + r_j\,\frac{b-a}{2}) \right|$$

5. **Étude d'un cas particulier**
Dans cette question, on suppose que $n = 2$.

(a) Déterminer le polynôme P_2'', ses racines r_1 et r_2, les polynômes L_1, L_2 ainsi que les intégrales $\lambda_1 = I(L_1)$ et $\lambda_2 = I(L_2)$.

(b) En appliquant la majoration obtenue au II. 4c, montrer que :

$$\left| \int_a^b g(u)\,du - \frac{b-a}{2} \left(g(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}) + g(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}) \right) \right| \leqslant \frac{M_4(g)(b-a)^5}{4320}$$

(c) On condidère un entier $p \geqslant 1$ et on subdivise le segment $[a,b]$ en p sous-segments de même longueur, dont on note les milieux c_1, c_2, ..., c_p.
En appliquant l'inégalité précédente à chacun de ces p sous-segments, majorer en fonction de p et de $M_4(g)$ l'expression suivante :

$$\left| \int_a^b g(u)\,du - \frac{b-a}{2p} \sum_{k=1}^{p} \left(g(c_k - \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}) + g(c_k + \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}) \right) \right|$$

(d) Écrire en pascal un algorithme de calcul de la somme précédente, les réels a et b, la fonction g ainsi que l'entier p étant supposés donnés.