CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1996

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE I

Cet exercice a pour objet l'étude d'un espace vectoriel de matrices.

On note $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et on considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note Id, j, k les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ représentés respectivement par ces matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Déterminer les valeurs propres des matrices J et K.
   (b) Montrer qu'on peut trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle les endomorphismes j et k sont tous deux diagonalisés.
   N.B. L'utilisation de cette base pourra permettre de simplifier la résolution de certaines des questions de la suite.

2. (a) Montrer que (I, J, K) est une famille libre de l'espace $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$.
   Dans toute la suite, on note E le sous-espace de $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$ engendré par les éléments I, J et K.
   (b) Montrer que si A et B sont deux éléments de E, leur produit est aussi dans E.

(c) Etant donnés trois réels x, y et z, déterminer les valeurs propres de la matrice

$$T = xI + yJ + zK.$$

3. Montrer qu'il existe trois suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et $(c_n)_{n\geqslant 1}$ de réels telles que

$$J^n = a_nI + b_nJ + c_nK$$

pour tout $n \geqslant 1$. Donner l'expression du terme général de chacune de ces suites en fonction de n.

4. (a) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de l'espace $\mathbb{R}^3$. on définit une application Φ de $\mathbb{R}^3$ dans E en posant, pour $V = xe_1 + ye_2 + ze_3$,

$$\Phi(V) = xI + yJ + zK.$$

Montrer que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur E.

(b) Déterminer l'ensemble H des vecteurs V de $\mathbb{R}^3$ tels que $\Phi(V)$ soit une matrice non inversible. L'ensemble H est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

EXERCICE II

1. On désigne par a un paramètre réel.
On note $\mathcal{D}_a$ l'ensemble des nombres réels x vérifiant les conditions $x > 0$ et $a\sqrt{x} \neq 3$ et on pose, pour tout $x \in \mathcal{D}_a$,

$$f_a(x) = \frac{3-a}{3-a\sqrt{x}}.$$

(a) Montrer que la fonction $x \mapsto f_a(x)$ est dérivable sur $\mathcal{D}_a$ et calculer sa dérivée.

(b) Etudier, en discutant suivant les valeurs du paramètre a, les variations de la fonction f_a. On donnera, dans chacun des cas $a < 0$, $0 < a < 3$ et $a > 3$ le tableau de variations et l'allure de la courbe représentative de f_a.

(c) A l'aide des résultats précédents, montrer que, quand $a < 0$ et quand $a > 3$, l'équation $f_a(x) = x$ admet une racine unique dans $\mathcal{D}_a$.

2. On fixe, dans cette partie, $a = 1$.

(a) Montrer que l'équation $f_1(x) = x$ admet deux racines : la racine 1 et une racine $\lambda_1 > 1$.

(b) Préciser la position relative, dans le plan rapporté à un repère d'axes (Ox, Oy), de la courbe représentative de la fonction f_1 et de la droite d'équation $y = x$.

(c) Montrer que, pour tout réel α vérifiant $0 < \alpha \leqslant \lambda_1$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = \alpha \quad \text{et, pour tout entier } n, \quad u_{n+1} = f_1(u_n)$$

est bien définie.

(d) Pour chaque valeur de α $(0 < \alpha \leqslant \lambda_1)$ montrer que la suite obtenue est monotone et déterminer sa limite.

3. On revient maintenant au cas plus général où $0 < a < 3$.

(a) Résoudre l'équation d'inconnue z :

$$(*) \quad az^3 - 3z^2 + 3 - a = 0$$

(b) Montrer que si x est racine de l'équation $f_a(x) = x$, alors $\sqrt{x}$ est racine de l'équation (*).

(c) En déduire les racines de l'équation $f_a(x) = x$. Discuter, suivant les valeurs de a, la position de ces racines l'une par rapport à l'autre.

EXERCICE III

On désigne par m un entier fixé supérieur ou égal à 2.
Une urne contient m boules numérotées de 1 à m. On note E l'ensemble de ces boules et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
Un dispositif permet d'effectuer le tirage au hasard d'une partie de ces boules, de telle manière que chacune des parties de E (c'est-à-dire chacun des éléments de $\mathcal{P}(E)$, y compris la partie vide ou l'ensemble de toutes les boules) ait la même probabilité d'être tirée.

1. On effectue un tirage.
   (a) Quelle est la probabilité que la boule portant le numéro 1 appartienne à l'ensemble de boules tirées ?
   (b) Pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant m$ on note A_i l'évènement: “ la boule portant le numéro i appartient à l'ensemble de boules tirées ”. Les évènements A_i sont-ils indépendants ?
   (c) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire égale au nombre de boules qui ont été tirées ? Quelle est sa variance ?
   (d) La probabilité de tirer un nombre pair de boules est-elle supérieure à la probabilité d'en tirer un nombre impair ?

2. On effectue maintenant une suite de tirages de la forme précédente, en remettant dans l'urne l'ensemble des boules tirées, après chaque tirage.
   (a) Déterminer, pour tout entier $k \geqslant 1$, la probabilité que la boule numéro i soit tirée pour la première fois au $k^{ième}$ tirage.
   (b) On note T_i la variable aléatoire qui prend la valeur k (k entier $\geqslant 1$) si la boule numéro i est tirée pour la première fois au $k^{ième}$ tirage. Déterminer l'espérance de T_i .
   (c) On admet, sans que la justification en soit demandée, que les variables aléatoires T_1, T_2, ..., T_m sont indépendantes. On note T le nombre minimum de tirages qu'il faut effectuer pour que chacune des m boules ait été tirée au moins une fois. Déterminer, pour tout entier $k \geqslant 1$, la probabilité que T soit inférieure ou égale à k. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire T.

3. On effectue maintenant une suite de tirages, sans remettre dans l'urne, après chaque tirage, les boules tirées. Chaque tirage consiste encore à prendre au hasard une partie des boules qui restent dans l'urne, chacune des parties de l'ensemble des boules restantes ayant la même probabilité d'être tirée.
   (a) Calculer la probabilité pour que les m boules soient toutes tirées en au plus deux tirages. Calculer la probabilité pour que les m boules soient toutes tirées en exactement deux tirages.
   (b) Pour tout $k \geqslant 1$ déterminer plus généralement la probabilité pour que les m boules soient toutes tirées en au plus k tirages (On pourra raisonner par récurrence).