CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Année 1994

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'objet du problème est l'étude d'une méthode de test de prélèvements sanguins dite du poolage ; elle est présentée dans la partie II, où on l'étudie d'un point de vue probabiliste. Dans tout le problème, a désigne un nombre réel strictement positif. Dans la partie I, on étudie, à titre préliminaire, la fonction f_a définie sur $]0;+\infty[$ par la relation : $f_a(x) = \dfrac{1}{x} - e^{-ax}$.

PARTIE 1. Étude de f_a.

1. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par la relation : $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
   On considère l'équation (E_a) : $g(x) = a$ (où l'inconnue x appartient à $]0;+\infty[$).

   (a) Étudier la variation de la fonction g.
   (On dressera le tableau de variation et on tracera la représentation graphique de g.)

   (b) On suppose que : $0 < a < \dfrac{1}{e}$.
   Montrer que (E_a) admet exactement deux solutions ; on les note $u(a)$ et $v(a)$, en convenant que $u(a) < v(a)$. Établir que :
   $$1 < u(a) < e < v(a).$$

   (c) Discuter suivant les valeurs de a le nombre de solutions de (E_a).

2. Soit h_a la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par la relation : $h_a(x) = 2\ln(x) + \ln(a) - ax$.
   On considère l'équation (F_a) : $h_a(x) = 0$ (où l'inconnue x appartient à $]0;+\infty[$).

(a) Étudier la variation de la fonction h_a (On ne demande pas la représentation graphique de h_a).

(b) On suppose que : $0 < a < 4e^{-2}$.
Montrer que (F_a) admet exactement deux solutions ; on les note $r(a)$ et $s(a)$, en convenant que $r(a) < s(a)$. Établir que :

$$0 < r(a) < \frac{2}{a} < s(a).$$

(c) Discuter suivant les valeurs de a le nombre de solutions de (F_a).

3. Soient a et b des nombres réels tels que $0 < a < b$ et x élément de $]0; +\infty[$. Montrer que :

$$\frac{1}{x} - 1 < f_a(x) < f_b(x) < \frac{1}{x}.$$

4. Comportement asymptotique de f_a.

(a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f_a(x)$.

(b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x)$.

5. Signe de f_a.

(a) Comparer les signes de $f_a(x)$ et de $a - g(x)$.

(b) En déduire le tableau de signes de $f_a(x)$ lorsque x décrit $]0; +\infty[$, a étant fixé.
(On sera amené à distinguer trois cas suivant la position de a par rapport à $\frac{1}{e}$)

6. Variation de f_a

(a) Comparer les signes de $f'_a(x)$ et de $h_a(x)$.

(b) Dresser le tableau de variation de f_a. On distinguera deux cas : $a \geqslant 4e^{-2}$ et $0 < a < 4e^{-2}$.
Dans ce dernier cas, on ne cherchera pas à préciser les valeurs de $f_a(r(a))$ et de $f_a(s(a))$.

7. On suppose dans cette question que $0 < a < \frac{1}{e}$.

(a) Établir que $u(a) < r(a) < v(a) < s(a)$ et que f_a présente un minimum en $r(a)$.

(b) Donner l'allure du graphe de f_a.

PARTIE II. Étude du poolage.

On étudie dans cette partie une méthode de détection des porteurs d'un parasite au sein d'un ensemble donné de N individus tirés au sort de façons indépendantes dans une population très vaste par rapport à N. La proportion de porteurs du parasite dans la population est p $(0 < p < 1)$.
On dispose d'un test permettant d'établir de façon certaine qu'un échantillon de sang contient ou non le parasite, le résultat de ce test étant dit positif dans le premier cas et négatif dans le second.
Pour chacun des N individus, on possède un prélèvement sanguin.
On envisage alors deux méthodes de détection.

Première méthode : on teste un à un les N prélèvements, effectuant ainsi N tests.
Seconde méthode (poolage) : on fixe un entier naturel non nul l. On suppose que N est un multiple de l et on pose $N = nl$. On répartit les N prélèvements en n groupes $G_1, G_2, ..., G_n$, chaque groupe G_i contenant l prélèvements. Pour chacun des groupes G_i , on extrait une quantité de sang de chacun des l prélèvements qu'il contient, puis on mélange ces extraits, obtenant ainsi un échantillon de sang H_i, caractéristique du groupe G_i.
On teste alors H_i.

- si le test de H_i est négatif, aucun des individus au sein du groupe G_i n'est porteur du parasite. Le travail sur le groupe G_i est alors terminé ;
- si le test de H_i est positif, on teste un à un les prélèvements de G_i pour détecter les porteurs du parasite au sein du groupe G_i.

Soient X la variable aléatoire égale au nombre de groupes G_i pour lesquels le test de H_i a été positif et T la variable aléatoire égale au nombre total de tests effectués dans la réalisation de la méthode du poolage.

1. (a) Exprimer T à l'aide de n, l et X.

   (b) Pour tout nombre entier naturel i compris entre 1 et n, calculer la probabilité de l'événement :

   «le test de H $_i$ est négatif».

   (c) Déterminer la loi de probabilité et l'espérance de X.
   On pose désormais et pour toute la fin du problème : $a = -\ln(1-p)$.

   (d) Montrer que $E(T) = N(1 + f_a(l))$.
   On suppose en outre, dans toute la fin du problème, que : $0 < p < 1 - \dfrac{1}{3^{1/3}}$.

2. (a) Montrer que $f_a(3) < 0$. Comparer les deux méthodes pour $l = 3$.

   (b) Établir que : $a < \dfrac{1}{e}$.
   On cherche maintenant à optimiser la méthode du poolage, c'est-à-dire choisir, en fonction de p, la valeur de l qui minimise $E(T)$, soit encore la valeur de l qui minimise $f_a(l)$.

3. Soit l un nombre entier naturel non nul. On dit que l vérifie la propriété (MIN) si, pour tout nombre entier naturel non nul l', $f_a(l) \leqslant f_a(l)$.

   (a) Montrer qu'il existe au moins un entier naturel non nul l qui vérifie la propriété (MIN) et qu'un tel entier est égal soit à $[r(a)]$, soit à $[r(a)] + 1$, où $[r(a)]$ désigne la partie entière de $r(a)$.
   On note désormais l_0 le plus petit des entiers naturels non nuls l qui vérifient la propriété (MIN).

   (b) Montrer que $f_a(l_0) < 0$. En déduire que $l_0 > 2$.

   (c) Montrer que $f_a(3) < f_a(2)$. Que peut-on en déduire pour l_0 ?

4. Proposer un algorithme, qu'on pourra écrire en TURBO-PASCAL, qui prend p en donnée et fournit la valeur de l_0.

5. Exemple : on suppose $p = 0,01$.

   (a) Déterminer la valeur de l_0.

   (b) Déterminer le rapport $\dfrac{E\,(T)}{N}$ lorsque $l = l_0$.