CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES II

Année 1993

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Partie I

1. (a) Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{ln(1-x)}{x}$

   (b) En déduire que : $e^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

2. (a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} du$$

   (b) Etablir l'encadrement : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} du \leqslant \frac{1}{n!}$

   (c) En conclure que : $e^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$

Dans toute la suite du problème, on désigne par N un nombre entier naturel non nul.

Partie II

On considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N : $B_1, B_2, ..., B_N$. On effectue N tirages *avec remise*, en supposant l'équiprobabilité des résultats. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et N, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la boule B_i sort lors du $i^{ème}$ tirage et la valeur 0 dans le cas contraire. On pose :

$$S_N = X_1 + X_2 + ... + X_N$$

1. Déterminer l'espérance de X_i; en déduire celle de S_N.
2. Pour tout nombre entier naturel k, on note $p(N, k)$ la probabilité de l'événement $S_N = k$.

   (a) Calculer $p(N, k)$ lorsque $k > N$. Montrer que :

   $$p(N, k) = C_N^k \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-k} \frac{1}{N^k} \quad \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant N$$

   (b) Le nombre entier naturel k étant fixé, déterminer la limite de $p(N, k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Partie III

On considère un ensemble E_N à N éléments. Soit σ une permutation de E_N, c'est à dire une bijection de E_N sur lui même. On appelle point fixe de σ tout élément a de E_N tel que $\sigma(a) = a$. Pour tout nombre entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant N$, on note $F(N, p)$ le nombre de permutations de E_N qui ont exactement p points fixes. On convient que $F(0, 0) = 1$.

1. (a) Montrer que $F(N, N) = 1$ et $F(N, N - 1) = 0$.

   (b) Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{N} F(N, k) = N!$

2. On pose $\omega_N = F(N, 0)$. Ainsi, ω_N est le nombre de permutations de E_N qui n'ont aucun point fixe. On convient que $\omega_0 = 1$.

   (a) Montrer que, pour tout nombre entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant N$:

   $$F(N, k) = C_N^k \omega_{N-k}$$

   (b) En déduire que : $\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{1}{k!} \dfrac{\omega_{N-k}}{(N-k)!} = 1$

   (c) En raisonnant par récurrence, établir la relation :

   $$\frac{\omega_N}{N!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!}$$

   (d) Déterminer la limite de $\dfrac{\omega_N}{N!}$ lorsque N tend vers $+\infty$.

On suppose désormais $N \geqslant 2$

Partie IV

On considère à nouveau une urne contenant N boules numérotées de 1 à N : $B_1, B_2, ..., B_N$. On effectue N tirages aléatoires, cette fois *sans remise*. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et N, on note Y_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la boule B_i sort lors du $i^{ème}$ tirage et la valeur 0 dans le cas contraire.

1. (a) Déterminer l'espérance de Y_i et celle de Y_iY_j, où $1 \leqslant i < j \leqslant N$.
   (b) Déterminer la covariance de Y_i et Y_j, où $1 \leqslant i < j \leqslant N$.
   (c) Les variables Y_i et Y_j sont-elles indépendantes ?
2. On pose $T_N = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$. Déterminer l'espérance et la variance de T_N.
3. Pour tout nombre entier naturel k, on note $q(N, k)$ la probabilité de l'événement $T_N = k$.

   (a) Calculer $q(N, k)$ lorsque $k > N$. Montrer que :

   $$q(N, k) = \frac{\omega_{N-k}}{k!(N-k)!} \quad \text{si} \quad k \leqslant N.$$

   (b) Le nombre entier naturel k étant fixé, déterminer la limite de $q(N, k)$ lorsque N tend vers $+\infty$. Comparer ce résultat à celui de la question **II**.2 b).

Partie V

1. A l'aide de la relation établie dans la question **III**.2 c), montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

   $$\omega_n = (n-1)(\omega_{n-1} + \omega_{n-2})$$

2. Pour tout nombre entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant N$, on pose :$\overline{q}(N, k) = q(N, N-k)$

   (a) Calculer $\overline{q}(N, 0)$ et $\overline{q}(N, 1)$
   (b) Pour $2 \leqslant k \leqslant N$, exprimer $\overline{q}(N, k)$ en fonction de $\overline{q}(N, k-1)$ et de $\overline{q}(N, k-2)$.

3. Ecrire un algorithme prenant N comme donnée et construisant la liste des valeurs de $\overline{q}(N, k)$, k variant de 0 à N. On s'attachera à minimiser le nombre d'opérations.