



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE
MATHEMATIQUES I

Année 1993

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Les trois parties du problème sont indépendantes.

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Dans tout le problème, on considère l'espace vectoriel K^n (où $n \geq 2$) rapporté à sa base canonique, notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. On note v_1 le vecteur de K^n dont les composantes dans la base $\mathcal{B}$ sont toutes égales à 1. On rappelle que l'espace vectoriel K^n est somme directe de deux sous-espaces vectoriels F et G , ce qu'on note $K^n = F \oplus G$, si tout vecteur x de K^n peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme $x = y + z$, où y appartient à F et z appartient à G . L'application $p : x \mapsto y$ est alors un endomorphisme de K^n , appelé projecteur sur F de direction G . Enfin, l'application identique de K^n est notée Id .

On se propose d'étudier l'ensemble S_n des matrices stochastiques d'ordre n , c'est-à-dire des éléments $M = (m_{ij})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont réels positifs ou nuls et tels que, pour tout nombre entier i appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$m_{i,1} + m_{i,2} + \dots + m_{i,n} = 1$$

(Ces matrices jouent un rôle important, notamment en calcul des probabilités.)

Partie I : un premier exemple

On considère des nombres réels a et b appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et tels que $a + b = 1$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice stochastique

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer à quelle condition un vecteur $v = (x, y, z)$ appartient au noyau de $f - Id$; expliciter une base de ce sous-espace vectoriel.
- (b) Montrer que (e_2, e_3) est une base de l'image de $f - Id$.
- (c) Établir que $\mathbb{R}^3 = \ker(f - Id) \oplus \text{Im}(f - Id)$.
- (d) Soit p le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\ker(f - Id)$ de direction $\text{Im}(f - Id)$. Déterminer $p(v_1)$, puis $p(e_3)$, $p(e_2)$ et $p(e_1)$. Expliciter la matrice P associée à p dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. On considère la base $\mathcal{B}' = (v_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
 - (a) Déterminer la matrice M' associée à f dans la base $\mathcal{B}'$.
 - (b) Pour tout nombre entier naturel non nul k , calculer par récurrence M^k .
 - (c) Déterminer la matrice de passage $\mathcal{C}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer son inverse.
 - (d) Dédire de ces résultats l'expression de la matrice M^k , ainsi que sa limite lorsque k tend vers $+\infty$ (c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les limites des coefficients de M^k).
Comparer cette limite à la matrice P obtenue dans la question 1.

Partie II : un second exemple

Dans cette partie, on suppose que $n \geq 3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice stochastique :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer une base du noyau de $f - Id$.
- (b) Montrer que $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n)$ est une famille libre d'éléments de l'image de $f - Id$, puis établir que c'en est une base.
- (c) Établir que $\mathbb{R}^n = \ker(f - Id) \oplus \text{Im}(f - Id)$.
- (d) Soit p le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\ker(f - Id)$ de direction $\text{Im}(f - Id)$. Déterminer $p(v_1)$, puis $p(e_1)$, $p(e_2), \dots, p(e_n)$.
Expliciter la matrice P associée à p dans la base $\mathcal{B}$.
- (e) Soit q le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\text{Im}(f - Id)$ de direction $\ker(f - Id)$.
Établir que $p + q = Id$, et que $p \circ q = q \circ p = 0$.
Expliciter la matrice Q associée à q dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. Exprimer M comme combinaison linéaire de P et Q .
En déduire l'expression de la matrice M^k , ainsi que sa limite lorsque k tend vers $+\infty$ en fonction des matrices P et Q .
Exprimer de même l'inverse de M en fonction de P et Q .

Partie III : étude du cas général

1. Soit V_1 la matrice colonne d'ordre n dont les coefficients sont tous égaux à 1.
 - (a) Montrer qu'une matrice M de $M_n(\mathbb{C})$ à coefficients réels positifs ou nuls est stochastique si et seulement si $MV_1 = V_1$.
 - (b) En déduire que, pour tout couple (A, B) d'éléments de S_n , le produit AB appartient encore à S_n , de même que les puissances positives de A et B .

2. Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et u un endomorphisme de E dont le noyau n'est pas réduit au vecteur nul. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $\ker(u)$, que l'on complète en une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E .

Établir que $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base de $\text{Im}(u)$. En déduire que :

$$\dim \text{Im}(u) + \dim \ker(u) = n$$

Dans la suite, on désigne par f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice $M = (m_{i,j})$ dans la base $\mathcal{B}$ est stochastique. Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on convient de noter :

$$|x| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$$

On remarquera que, pour tout couple (x, x') d'éléments de $\mathbb{C}^n$, $|x + x'| \leq |x| + |x'|$.

3.
 - (a) Établir que, pour tout élément x de $\mathbb{C}^n$, $|f(x)| \leq |x|$.
 - (b) En déduire que les modules de toutes les valeurs propres de f sont inférieurs ou égaux à 1. Montrer que 1 est valeur propre de f .
4.
 - (a) Soit y un élément de $\text{Im}(f - Id) \cap \ker(f - Id)$, écrit sous la forme $f(x) - x$. Pour tout nombre entier naturel non nul k , exprimer $f^k(x)$ en fonction de k , x et y . Déduire du 3.a) que $k|y| \leq 2|x|$, puis prouver que y est nul.
 - (b) Déduire des questions précédentes que $\ker(f - Id) \oplus \text{Im}(f - Id) = \mathbb{C}^n$.
 - (c) Montrer que, pour tout élément x de $\text{Im}(f - Id)$, $f(x)$ appartient à $\text{Im}(f - Id)$. Établir que tout sous-espace propre de f associé à une valeur propre autre que 1 est inclus dans $\text{Im}(f - Id)$.
On suppose désormais que l'endomorphisme f est diagonalisable.
5.
 - (a) Montrer que la somme directe des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de f autres que 1 est égale à $\text{Im}(f - Id)$.
 - (b) On complète une base $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ de $\ker(f - Id)$ en une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs propres de f . On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f rangées par modules décroissants

$$(1 = |\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_r| \geq |\lambda_{r+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|),$$

associées à ces vecteurs propres $(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Soit D la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}'$.

Prouver que la suite (M^k) converge si et seulement si la suite (D^k) converge.

- (c) En déduite que la suite (M^k) converge si et seulement si 1 est la seule valeur propre de M de module 1.
- (d) Dans ces conditions, montrer que la limite de la suite (M^k) est la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ au projecteur sur $\ker(f - Id)$ de direction $\text{Im}(f - Id)$.
Que permet de préciser le résultat établi dans la **partie I** ?