CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE, ECONOMIQUE ET TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES II

Année 1991

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'objet du problème est une étude de gain associé à un jeu de pile ou face. La première partie permet d'établir quelques résultats liminaires d'analyse ; la seconde partie étudie la stratégie d'un joueur. Dans tout ce problème, on désigne par x un nombre réel appartenant à $]0,1[$.

Partie I

1. Pour tout nombre entier naturel n, on pose : $s(n,0) = 1 + x + x^2 + ... + x^n$
   Calculer $s(n,0)$ et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $s(n,1) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + (n+1)x^n$

   (a) Exprimer $(1-x)s(n,1)$ à l'aide de $s(n,0)$ et en déduire la limite de $s(n,1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) Retrouver ce résultat à l'aide de la dérivation.

3. Plus généralement, pour tout couple (n,r) de nombres entiers naturels, on pose :

$$s(n,r) = \sum_{k=0}^{n} C_{r+k}^{r} x^k$$

   (a) On suppose que n et r sont non nuls. On rappelle que, pour tout nombre entier naturel non nul k : $C_{r+k}^{r} - C_{r+k-1}^{r} = C_{r+k-1}^{r-1}$. En déduire que :

$$(1-x)s(n,r) = s(n,r-1) - C_{n+r}^{r} x^{n+1}$$

(b) Déterminer les limites des suites de termes généraux $n^r x^n$ et $C_{n+r}^r x^n$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire par récurrence que, lorsque n tend vers $+\infty$, $s(n,r)$ tend vers la limite :

$$s(r) = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

(c) Soit y un nombre réel strictement positif. Déterminer suivant la valeur de y la nature de la série de terme général $C_{r+k}^r y^k$, le nombre r étant fixé.

Partie II

On désigne par n et N des nombres entiers naturels non nuls. On considère une succession (éventuellement infinie) de jets d'une pièce. On suppose que la probabilité d'obtenir pile lors d'un jet est $1-x$ et que la probabilité d'obtenir face est x. Les jets sont supposés indépendants. On désigne enfin par S_n le nombre de fois où l'on a obtenu pile au cours des n premiers jets, par T_n le numéro du jet où l'on obtient pile pour la $n^{ème}$ fois.

A/

1. Préciser la loi de S_n. Calculer l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.
2. Préciser la loi de T_1. Calculer l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.
3. L'objet de cette question est de calculer l'espérance et la variance de T_r. Soient k un nombre entier naturel et r un nombre entier naturel non nul.

   (a) Montrer que l'événement $\{T_r = k+r\}$ est réalisé si et seulement si les événements $\{S_{k+r-1} = r-1\}$ et "pile est obtenu au $(k+r)^{ème}$ jet" le sont. En déduire la loi de T_r. Vérifier que la somme des probabilités des événements $\{T_r = k+r\}$, où $k \in \mathbb{N}$, est égale à 1.

   (b) Calculer l'espérance de T_r en utilisant la limite $s(r)$ de la suite $s(n,r)$ introduite dans la **partie I**.

   (c) Calculer de même $E(T_r^2) + E(T_r)$. En déduire la variance de T_r.

B/

On décide que le jeu s'arrête dès que soit pile, soit face a été obtenu pour la $N^{ème}$ fois. Soit Z le nombre de jet nécessaires pour que le jeu s'arrête.

1. Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre Z.
2. En utilisant une méthode analogue à celle de la question **A/**3.a, déterminer, pour tout nombre entier naturel k, la probabilité pour que le jeu s'arrête au $(N+k)^{ème}$ jet, pile étant obtenu pour la $N^{ème}$ fois.
3. Donner la loi de probabilité de Z.

C/

Soient a un nombre réel strictement positif et λ un nombre réel strictement supérieur à 1. Un joueur parie de la façon suivante : Lors du $n^{ème}$ jet, il mise la somme a^{n-1} (en francs).

- Si pile sort, il reçoit la somme λa^{n-1} et il perd sa mise ;
- Sinon il perd sa mise.

On désigne par G_n la somme des profits et des pertes (celles ci étant comptées négativement) du joueur après son $n^{ème}$ succès (qui survient donc à l'issue du jet ayant pour numéro T_n).

1. Dans cette question, on suppose que $a = 1$ (le joueur parie donc un franc à chaque jet).

(a) Exprimer G_1 en fonction de T_1 et calculer l'espérance de G_1.

(b) Plus généralement, pour tout nombre entier naturel non nul r, exprimer G_r en fonction de T_r et en déduire l'espérance de G_r.

2. Dans cette question, on suppose que $a > 1$.

(a) Exprimer G_1 en fonction de a^{T_1}. Déterminer a en fonction de λ de telle sorte que G_1 ne dépende pas des valeurs prises par T_1. Dans le cas général, étudier l'existence des espérances de a^{T_1} et de G_1. Lorsque ces espérances existent, les calculer.

(b) Exprimer G_2 en fonction de a^{T_1} et de a^{T_2}. Etudier l'existence et déterminer la valeur de l'espérance de G_2.

(c) Soit, plus généralement, r un nombre entier naturel non nul. En utilisant la même méthode, étudier l'existence de l'espérance de G_r. Montrer que, si cette espérance existe, alors :

$$E(G_r) = \frac{1}{a-1}\left(1 - \frac{a^r(1-x)^r}{(1-ax)^r}\right)(1 - \lambda(1-x))$$

(d) En déduire, si elles existent, la limite de $E(G_r)$ lorsque r tend vers $+\infty$ et la limite de $E(G_r)$ lorsque a tend vers 1 par valeurs supérieures.

3. Dans cette question, on suppose que $a < 1$.

(a) Les conditions d'existence de l'espérance de a^{T_1} sont-elles vérifiées ? La formule de la question 2.c reste-t-elle valable ? En déduire la limite de $E(G_r)$ lorsque r tend vers $+\infty$.

(b) Soit g_k la somme des profits et des pertes réalisés lors du $k^{ème}$ jet. Exprimer g_k en fonction d'une variable de Bernoulli associée au $k^{ème}$ jet.

(c) Soit H_m le gain (algébrique) réalisé après m jets. Calculer l'espérance de H_m et la limite de $E(H_m)$ lorsque m tend vers $+\infty$.