CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1991

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PRELIMINAIRE

Soit a un nombre réel strictement supérieur à -1. Pour tout nombre réel strictement positif x, établir la convergence de l'intégrale :

$$\int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$$

puis celle de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$$

L'objet de la partie **I** est l'étude de la fonction f_a définie sur $[0, +\infty[$ par la relation :

$$f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$$

L'objet de la partie **II** est l'étude dune méthode de calcul de valeurs approchées de la fonction φ définie pour $a > -1$ par la relation :

$$\varphi(a) = f_a(0) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$$

PARTIE I

1. *Cas particulier* $a = 0$

   (a) Montrer que la fonction f_0 est en fait définie sur $\mathbb{R}$.

   (b) Interpréter la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} f_0$ en termes de probabilités.
   En déduire la valeur de $f_0(0)$, ainsi que les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. *Propriétés générales de* f_a

   (a) Montrer que la fonction f_a est de classe C^∞ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Calculer les dérivées première et seconde de f_a.

   (b) Déterminer le sens de variation de f_a sur $]0, +\infty[$.

   (c) Etudier la limite de f_a en $+\infty$.

3. *Etude du cas* $a > 0$

   (a) Montrer que f_a est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Calculer $f_a'(0)$.

   (b) Etudier la variation de la fonction f_a'.

   (c) Donner l'allure de la courbe représentative de f_a.

4. *Etude du cas* $-1 < a < 0$

   (a) Montrer que la fonction f_a est continue sur $[0, +\infty[$. Cette fonction est-elle dérivable en 0 ?

   (b) Montrer que la fonction f_a est convexe.

   (c) Donner l'allure de la courbe représentative de f_a.

5. *Etude de* f_a *au voisinage de* $+\infty$ $(a > -1)$

   (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x :

   $$f_a(x) = x^{a-1} e^{-x^2/2} + (a-1) \int_x^{+\infty} t^{a-2} e^{-t^2/2} dt$$

   cette dernière intégrale étant convergente.

   (b) En déduire le signe de : $\quad f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2} \quad$ selon les valeurs de a.

   (c) Etablir que pour $x > 0$ et pour $a > -1$:

   $$\left| f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2} \right| \leqslant \frac{|a-1|}{x^2} f_a(x)$$

   (On pourra utiliser la décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur l'intervalle $[x, +\infty[$.)

   (d) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$:

   $$f_a(x) \sim x^{a-1} e^{-x^2/2}$$

   Application

   Etablir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_a(x)dx$.

   A l'aide d'une intégration par partie, justifier l'égalité :

   $$f_{a+1}(0) = \int_0^{+\infty} f_a(x) dx$$

   (e) Déduire également de la question **c)** que si $-1 < a \leqslant 1$ et $x > 0$:

   $$(1) \qquad \left| f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2} \right| \leqslant 2x^{a-3} e^{-x^2/2}$$

PARTIE II

Pour tout nombre réel $a > -1$, on pose :

$$\varphi(a) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$$

Pour tout nombre réel strictement positif x, on écrit $\varphi(a)$ sous la forme :

$$\varphi(a) = g_a(x) + f_a(x) \qquad \text{avec} \qquad g_a(x) = \int_0^x t^a e^{-t^2/2} dt$$

1. Relation fonctionnelle vérifiée par φ

   (a) Etablir l'égalité :
   $$(2) \qquad \varphi(a+2) = (a+1)\varphi(a)$$

   (b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer $\varphi(a+2n)$ en fonction de $\varphi(a)$. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$. En déduire la valeur de $\varphi(n)$ pour tout nombre entier naturel n.

2. *Développement en série de* $g_a(x)$
   Pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel t positif ou nul, on pose :
   $$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k+a}}{2^k k!}$$

   (a) Ecrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction $u \mapsto e^{-u}$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{t^2}{2}\right]$ à l'ordre n, où $n \in \mathbb{N}$.
   En déduire le signe de $t^a e^{-t^2/2} - S_n(t)$ selon les valeurs de n. En conclure que, pour tout nombre réel strictement positif t et pour tout couple (p, q) de nombres entiers naturels :
   $$S_{2p+1}(t) \leqslant t^a e^{-t^2/2} \leqslant S_{2q}(t)$$

   (b) Montrer alors que, pour tout nombre entier naturel non nul n :
   $$\left| t^a e^{-t^2/2} - S_n(t) \right| \leqslant \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}$$
   (On distinguera deux cas suivant la parité de n.)

   (c) En conclure que. pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel strictement positif x :
   $$(3) \qquad \left| g_a(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k!(2k+a+1)} \right| \leqslant \frac{x^{2n+a+1}}{2^n n!(2n+a+1)}$$
   Justifier l'écriture
   $$(4) \qquad g_a(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k!(2k+a+1)}$$

3. Méthode d'approximation de $\varphi(a)$
   On suppose désormais que $-1 < a \leqslant 1$. (On remarque que, grâce à l'égalité (2), on peut toujours se ramener à ce cas.)
   On écrit :
   $$\varphi(a) = g_a(x) + f_a(x)$$
   Grâce à l'inégalité (1), on choisit une valeur de x pour laquelle $f_a(x)$ est suffisamment petit. Le nombre x étant ainsi fixé, on approche $g_a(x)$ par une somme partielle de la série (4) :
   $$s_n(x) = x^{a+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^k k!(2k+a+1)}$$

(a) Déterminer le plus petit des nombres entiers naturels p tels que, pour tout élément a de $]-1,1]$:

$$2p^{a-3}e^{-p^2/2} \leqslant 10^{-5}$$

(b) En utilisant l'inégalité (1), montrer que pour $x=5$ et pour tout élément a de $]-1,1]$:

$$\left| f_a(x) - x^{a-1}e^{-x^2/2} \right| \leqslant 10^{-5}$$

(c) On prend donc désormais $x=5$. Pour $a \in]-1,1]$ et pour tout nombre entier naturel k, on pose :

$$u_k = \frac{5^{2k}}{2^k k!(2k+a+1)}$$

Exprimer u_{k+1} en fonction de k et de u_k. Mettre en place un algorithme de calcul de u_n pour des valeurs données de n et de a.

(d) Grâce à l'inégalité (3), déterminer un nombre entier naturel n tel que. pour tout élément a de $]-1,1]$:

$$|g_a(5) - s_n(5)| \leqslant 10^{-5}$$

(e) La méthode proposée permet-elle, avec les choix effectués pour x et n, d'obtenir des valeurs approchées de $\varphi(a)$ à 2×10^{-5} prés lorsque a est donné dans l'intervalle $]-1,1]$?