CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1991

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère la matrice : $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ représenté par M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Résoudre par la méthode du pivot de Gauss, en discutant suivant la valeur du paramètre λ, le système d'équations :

$$\begin{cases} (1-\lambda)\,x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + (3-\lambda)\,x_3 = 0 \end{cases}$$

En déduire les valeurs propres de la matrice M.

   (b) Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable. Déterminer une base $(V_1; V_2; V_3\ )$ de vecteurs propres de f que l'on choisira de manière que chacun ait, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ des coordonnées égales à 0 ou à 1.

2. À tout vecteur $y = (y_1; y_2; y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ fixé, on associe la fonction φ_y de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout élément $x = (x_1; x_2; x_3)$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\varphi_y(x) = (y_1 + y_2)x_1 + (y_1 + 2y_2)x_2 + y_3x_3.$$

(a) Le vecteur $y = (y_1; y_2; y_3)$ étant fixé dans $\mathbb{R}^3$, exprimer $\varphi_y(f(x))$ en fonction des coordonnées x_1;x_2;x_3 de x.

(b) Montrer qu'à chaque vecteur $y = (y_1; y_2; y_3)$ de $\mathbb{R}^3$, on peut faire correspondre un vecteur $Y = (Y_1; Y_2; Y_3)$ et un seul de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$: $\varphi_y(f(x)) = \varphi_Y(x)$ À cet effet, on exprimera Y_1,Y_2 et Y_3 en fonction de y_1,y_2 et y_3.
On pose $Y = g(y)$. Vérifier que g est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$; en donner la matrice N dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. On considère la matrice : $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^3$ représenté par S dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Calculer l'inverse S^{-1}de S.

   (b) Calculer le produit matriciel SMS^{-1}.

   (c) En déduire que les vecteurs $s(V_1)$, $s(V_2)$ et $s(V_3)$ sont des vecteurs propres de la matrice ${}^tN$, transposée de la matrice N.Préciser les valeurs propres associées.

EXERCICE 2

Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre entier nature1 non nul n, on considère la fonction polynomiale P_n définie par la relation : $P_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k - a$.

1. Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une solution positive et une seule, que l'on notera x_n. Montrer que $x_n \leqslant a$.

2. Étudier le signe de $P_{n+1}(x_n)$. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$est monotone.

3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente. On note l sa limite. Prouver que $0 \leqslant l < 1$.

4. Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n, le nombre x_n est solution de l'équation :
$$x^{n+1} - (a+1)x + a = 0.$$
En déduire que : $l = \dfrac{a}{a+1}$

EXERCICE 3

On désigne par $(\Omega; A; P)$ un espace probabilisé et par p un nombre réel tel que $0 < p < 1$.
On rappelle que le symbole $P(A/B)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

I.

Un jour donné, un modèle de voiture est successivement examiné par N clients éventuels. On suppose que N est une variable aléatoire définie sur $(\Omega; A; P)$, à valeurs dans l'ensemble N des nombres entiers naturels telle que, pour tout couple $(r; s)$ de nombre entiers naturels :
$$P(N \geqslant r + s / N \geqslant r) = P(N \geqslant s).$$

1. Déterminer la probabilité $P(N \geqslant 1)$. En choisissant $r = s = 1$, calculer $P(N \geqslant 2)$. En déduire la valeur de $P(N = 1)$.

2. En raisonnant par récurrence, trouver, pour tout nombre entier naturel n, les probabilité $P(N \geqslant n)$ et $P(N = n)$.

3. Trouver l'espérance $E(N)$ et la variance $V(N)$ de N.

4. Application numérique. On suppose que $p = \dfrac{1}{10}$. Calculer$P(N = n)$, $E(N)$ et $V(N)$.

II.

Parmi les clients qui examinent le modèle, certains passent commande, les autres non. Pour tout nombre entier naturel non nul i, on note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le $i^{ième}$ client passe commande d'une voiture et 0 dans le cas contraire. On convient que $X_0 = 0$.
On désigne par α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. On suppose que la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est définie sur l'espace probabilisé $(\Omega; A; P)$ et que, pour tout nombre entier naturel non nul i, $P(X_i = 1) = \alpha$.
On suppose enfin que les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes et indépendantes de N.

1. Pour tout nombre entier naturel n, on pose $S_n = X_0 + X_1 + ... + X_n$.
   Déterminer la loi de probabilité de S_n.

2. On note S la variable aléatoire définie sur $(\Omega; A; P)$ de la façon suivante : pour tout élément ω de Ω, si $N(\omega) = n$, on pose $S(\omega) = S_n(\omega)$. Ainsi, S représente le nombre de voitures commandées. On se propose de trouver la loi de probabilité de S.

   (a) Soit $k$un nombre entier naturel. On admet (la justification n'est pas demandée) que, pour tout nombre réel fixé x appartenant à l'intervalle $[0; 1[$ la série $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^n$ est convergente.
   On note σ_k la somme de cette série. Ainsi $\sigma_k = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^n$.
   Montrer que pour tout entier naturel k : $\sigma_{k+1} = x\sigma_k + x\sigma_{k+1}$.

   (b) En déduire par récurrence sur k, que : $\sigma_k = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$

   (c) Trouver la loi de probabilité de S.

   (d) Application numérique.
   On suppose que $p = \dfrac{1}{10}$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Déterminer la loi de probabilité de S.
   Vérifier qu'elle est du même type que la loi de N obtenue dans la partie I.
   Calculer l'espérance et la variance de S.