CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1989

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Soit k un nombre entier naturel non nul. L'objet du problème est l'étude de la série de terme général $\dfrac{1}{p^{2k}}$, où $p \geqslant 1$.

PRELIMINAIRE

À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul p :

$$(0) \qquad \frac{1}{(p+1)^{2k}} \leqslant \frac{1}{2k-1}\left(\frac{1}{p^{2k-1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k-1}}\right) \leqslant \frac{1}{p^{2k}}$$

En déduire la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{p^{2k}}$ et un majorant simple de sa somme.

Dans la suite, pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose :

$$S_{2k}(n) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{2k}} \qquad R_{2k}(n) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}} \qquad \text{et} \qquad S_{2k} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}} = S_{2k}(n) + R_{2k}(n)$$

Dans la partie I, on traite le cas particulier où $k = 1$ et l'on détermine S_2.

Dans la partie II, on étudie d'abord une suite de polynômes et l'on généralise la méthode de la partie I pour déterminer S_{2k}.

PARTIE I

Dans cette partie, on désigne par n un nombre entier naturel non nul.

1. On considère la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;1[$ par la relation :

   $f_1(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2}\right)\cot(\pi x)$

   (où $\cot(\pi x) = \dfrac{1}{\tan(\pi x)}$)

   (a) Comparer $f_1(x)$ et $f_1(1-x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

   (b) Déterminer les limites de f_1 aux bornes de son ensemble de définition.
   On prolonge désormais f_1 par continuité en 0 et en 1.

   (c) Pour tout élément x de $]0;1[$, calculer $f_1'(x)$. Montrer que f_1 est de classe C^1 sur l'intervalle $[0;1]$.

   (d) Construire la courbe représentative de f_1.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour toute fonction f de classe C^1 sur $[0;1]$, il existe un nombre réel strictement positif a tel que :

$$\left|\int_0^1 f(x)\sin(2\pi nx)dx\right| \leqslant \frac{a}{n}$$

   En déduire la limite de $\int_0^1 f(x)\sin(2\pi nx)dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Pour tout nombre entier naturel non nul p, calculer l'intégrale :

$$I_p = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right)\cos(2\pi px)dx$$

4. (a) Vérifier que, pour tout élément x de l'intervalle $]0;1[$:

$$2\sum_{p=1}^{n}\cos(2\pi px) = \cot(\pi x)\sin(2\pi nx) + \cos(2\pi nx) - 1$$

   (on pourra multiplier chacun des deux membres par $\sin(\pi x)$)

   (b) À l'aide des résultats précédents, établir que :

$$\sum_{p=1}^{n} I_p = \frac{1}{2}\int_0^1 f_1(x)\sin(2\pi nx)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right)\cos(2\pi nx)dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right)dx$$

   (c) En faisant tendre n vers $+\infty$, déduire de l'égalité précédente que :

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6}$$

5. On se propose dans cette question de comparer $S_2(n)$, $S_2(n) + \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{\pi^2}{6}$.

   (a) Écrire un algorithme de calcul de $S_2(n)$ lorsque l'entier n est donné. Comparer les valeurs décimales approchées à 10^{-6} près de $S_2(n)$, $S_2(n) + \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{\pi^2}{6}$ pour $n = 10$, $n = 100$ et $n = 1000$.

   (b) À l'aide de l'inégalité (0), prouver que :

$$0 \leqslant \frac{\pi^2}{6} - S_2(n) \leqslant \frac{1}{n} \text{ et } 0 \leqslant S_2(n) + \frac{1}{n} - \frac{\pi^2}{6} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

   Expliquer alors les résultats numériques précédents.

PARTIE II

A) *Étude d'une suite de polynômes*

On se propose d'étudier les suites $(Q_n)_{n\in}$ de polynômes à coefficients réels satisfaisant aux trois conditions :

(1) $Q_0 = 1$

(2) $\forall n \geqslant 1 \ Q'_n = Q_{n-1}$

(3) $\forall n \geqslant 2 \ Q_n(1) = Q_n(0)$.

1. (a) Établir qu'il existe une suite $(r_n)_{n\in}$ de nombres rationnels et une seule telle que :

$$r_0 = 1 \text{ et pour } n \geqslant 2 : \sum_{j=0}^{n-1} \frac{r_j}{(n-j)!} = 0$$

Expliciter r_1 , r_2 , r_3 et r_4 sous forme de fractions irréductibles.
On considère désormais la suite $(P_n)_{n\in}$ de polynômes définie par :

$$P_n(X) = \sum_{j=0}^{n} \frac{r_j}{(n-j)!} X^{n-j}$$

(b) Montrer que la suite $(P_n)_{n\in}$ vérifie les propriétés (1), (2) et (3). Expliciter P_1 , P_2 , P_3 et P_4.

2. On considère une suite $(Q_n)_{n\in}$ de polynômes à coefficients réels vérifiant les propriétés (1), (2) et (3).

(a) Prouver que, pour tout nombre entier naturel n :

$$Q_n(X) = \sum_{j=0}^{n} \frac{Q_j(0)}{(n-j)!} X^{n-j}.$$

(b) Montrer que la suite $(Q_n(0))_{n\in}$ vérifie :

$$Q_0(0) = 1 \text{ et pour } n \geqslant 2 : \sum_{j=0}^{n-1} \frac{Q_j(0)}{(n-j)!} = 0.$$

(c) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n , $Q_n = P_n$.

3. (a) En considérant la suite de polynômes $((-1)^n P_n(1-X))_{n\in}$, établir que pour tout nombre entier naturel n :

$$P_n(X) = (-1)^n P_n(1-X).$$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul k, $r_{2k+1} = 0$. Calculer r_6 et r_8. On pourra vérifier que $r_8 = -\dfrac{1}{1209600}$.

B) *Expression de* S_{2k}

1. Pour tout nombre entier naturel $k \geqslant 2$, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0;1[$ par la relation : $f_k(x) = (P_{2k}(x) - r_{2k})\cot(\pi x)$

(a) Comparer $f_k(x)$ et $f_k(1-x)$.

(b) Déterminer les limites de f_k aux bornes de son ensemble de définition.
On prolonge désormais f_k par continuité en 0 et en 1.

(c) Prouver que f_k est de classe C^1 sur l'intervalle $[0;1]$.

2. Pour tout nombre entier naturel non nul p, on considère les intégrales :

$$J_p(k) = \int_0^1 P_{2k}(x)\cos(2\pi px)dx \text{ et } I_p(k) = \int_0^1 (P_{2k}(x) - r_{2k})\cos(2\pi px)dx$$

   (a) Calculer $J_p(1)$

   (b) Exprimer $J_p(k+1)$ en fonction de $J_p(k)$. En déduire $J_p(k)$, puis $I_p(k)$.

3. (a) En calculant de deux façons la somme :

$$I_1(k) + I_2(k) + \ldots + I_n(k)$$

   puis en faisant tendre n vers $+\infty$, exprimer S_{2k} en fonction de r_{2k}.

   (b) Retrouver ainsi l'expression de S_2 ; calculer S_4 , S_6 et S_8.

4. À l'aide de l'inégalité (0), prouver que :

$$0 \leqslant S_{2k}(n) + \frac{1}{(2k-1)n^{2k-1}} - S_{2k} \leqslant \frac{1}{n^{2k}}$$

   En déduire des valeurs approchées à 10^{-6} près de S_4 , S_6 et S_8 ; les comparer aux valeurs exactes obtenues précédemment.