CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
**DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT**
Direction des Admissions et concours

---

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

---

**OPTION GENERALE**

MATHEMATIQUES I

**Année 1988**

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*
*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

L'objet du problème est d'étudier la convergence d'une suite de polynômes d'interpolation d'une fonction $f$, ce qui constitue la partie III. Dans la partie I, on construit les polynômes d'interpolation de $f$ ; dans la partie II, on explicite un tel polynôme sur un exemple.

## PARTIE I : Interpolation d'une fonction par un polynôme

Soient $n$ un nombre entier naturel non nul et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une suite de nombres réels distincts. On leur associe les $n$ polynômes $L_1, L_2, \dots, L_n$, définis pour $1 \leqslant j \leqslant n$ par :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

1. Pour tout entier $j$ tel que $1 \leqslant j \leqslant n$, expliciter le degré et les racines du polynôme $L_j$. Calculer $L_j(x_j)$.

2. Soit $P$ un polynôme à coefficients réels de degré strictement inférieur à $n$. On pose :

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} P(x_j) L_j(x)$$

   (a) Pour tout entier $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, calculer $Q(x_k)$.
   (b) Prouver que $P = Q$.

3. Soit $f$ une fonction définie et continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On suppose que, pour tout entier $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, le point $x_k$ appartient à $I$.
   Montrer qu'il existe un polynôme $P_f$ de degré strictement inférieur a $n$ et un seul satisfaisant aux conditions suivantes : pour tout entier $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,
$$P_f(x_k) = f(x_k)$$

# PARTIE II : Exemples

1. On prend $f(x) = \dfrac{64}{x+7}$ ;$I = [0, 36]$ ; $n = 3$ ; $x_1 = 1,\ x_2 = 9,\ x_3 = 25$.
   (a) Expliciter les polynômes $L_1, L_2, L_3$.
   (b) Calculer le polynôme $P_f$ défini dans la question **I.3**. On vérifiera que le polynôme $64P_f$ est a coefficients dans $\mathbb{Z}$.
2. On prend $g(x) = \dfrac{64}{x^2+7}$; $\quad I = [-6, 6],\ n = 6;\ x_1 = -5,\ x_2 = -3,\ x_3 = -1,\ x_4 = 1,\ x_5 = 3,\ x_6 = 5.$
   (a) Sans nouveaux calculs, expliciter le polynôme $P_g$, (défini comme dans la question **I.3**) à l'aide du polynôme $P_f$.
   (b) Etudier la variation de $P_g$ sur l'intervalle $[-6, 6]$.
   (c) Construire, dans le plan rapporté il un repère orthonormal, les courbes représentatives de $g$ et de $P_g$.

# PARTIE III : Etude d'une suite de polynômes d'interpolation

Dans cette partie, on considère la fonction $f$ définie sur $[0, 1]$ par la relation :
$$f(x) = \frac{1}{x + \alpha^2}$$
où $\alpha$ est un nombre réel strictement positif.
Les notations étant les mêmes que dans la partie **I** les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont donnés par :
$$x_k = \left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2 \qquad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant n$$
On note $P_n$, le polynôme $P_f$ défini dans la question **I.3**.

1. *Calcul de* $f(x) - P_n(x)$
   On pose : $\qquad A(x) = 1 - (x + \alpha^2)P_n(x).$
   (a) Vérifier que $A(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal $n$, qui admet $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme racines.
   (b) On pose :
$$Q_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$$
   Montrer qu'il existe un nombre réel $c_n$ tel que, pour tout nombre réel $x$ :
$$A(x) = c_n Q_n(x)$$
   (c) Prouver finalement que, pour tout nombre réel $x$ :
$$f(x) - P_n(x) = \frac{(-1)^n Q_n(x)}{(x + \alpha^2)\prod_{k=1}^{n}(\alpha^2 + x_k)}$$

2. *Etude d'une fonction auxiliaire*
   Soit $h$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$h(x) = \int_0^1 \ln(x^2+u^2)du$$

   (a) Calculer $h(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.
   (b) Vérifier que. pour tout nombre réel strictement positif $x$ :

$$h'(x) = \pi - 2\arctan x$$

   (c) Etudier la variation de $h$. Prouver que $h$ se prolonge en une fonction de classe $C^\infty$ sur $[0,+\infty[$.
   (d) Montrer qu'il existe un nombre réel $\alpha_0$ et un seul tel que :

$$0 < \alpha_0 < 1 \qquad \text{et} \qquad h(\alpha_0) = 2\ln 2 - 2$$

   (e) Construire la courbe représentative de $h$.

3. *Détermination d'un équivalent de $c_n$*

   (a) Soient $F$ une fonction de classe $C^2$ sur $[0.1]$ et $a$ un élément de l'intervalle $[0,1[$. Pour tout nombre réel $t$ tel que $0 \leqslant t \leqslant 1-a$, on pose :

$$G(t) = \int_a^{a+1} F(u)du - tF\left(a+\frac{t}{2}\right)$$

      i. Calculer $G'$ en fonction de $F$ et de $F'$.
      ii. Soit $x$ un élément de l'intervalle $[0,1-a]$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral la fonction $F$ sur l'intervalle $\left[a+\dfrac{x}{2}, a+x\right]$, établir que :

$$\left|G'(x)\right| \leqslant \frac{x^2}{8}M \qquad \text{où} \quad M = \sup_{t\in[0,1]} \left|F''(t)\right|$$

      iii. En déduire que, pour tout élément $x$ de l'intervalle $[0,1-a]$ :

$$|G(x)| \leqslant \frac{x^3}{24}M$$

   (b) Montrer que, pour tout entier $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$ :

$$\left|\ln(\alpha^2+x_k) - n\int_{(k-1)/n}^{k/n} \ln(\alpha^2+u^2)du\right| \leqslant \frac{1+\alpha^2}{12\alpha^4 n^2}$$

   A cet effet, on appliquera le résultat de la question précédente, avec :

$$F(u) = \ln(\alpha^2+u^2) \qquad a = \frac{k-1}{n} \;; \quad x = \frac{1}{n}$$

   (c) Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de terme général :

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} (\alpha^2+x_k)$$

   Déduire du **b.** la limite de la suite $(\ln a_n - nh(\alpha))_{n\geqslant 1}$. Obtenir enfin un équivalent simple de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

4. (a) Vérifier que : $\qquad Q_n(1) = \dfrac{(4n)!}{2^{4n} n^{2n} (2n)!}$.

(b) On admet l'équivalent (formule de Stirling) : $\;n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.
Déterminer un équivalent simple de la suite $(Q_n(1))_{n\geqslant 1}$.

(c) Déterminer l'ensemble des nombres réels strictement positifs $\alpha$ tels que la suite $(P_n(1))_{n\geqslant 1}$ converge vers $f(1)$.