CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1988

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Pour tout nombre entier non nul n, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$

1. A l'aide d'un encadrement convenable de I_n, déterminer la limite de la suite (I_n).

2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = 1$.

3. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose : $J_n = nI_n$.

   (a) Montrer que : $J_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$.

   (b) Montrer que, pour tout nombre réel positif t : $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$.
   En déduire la limite de la suite (J_n).

EXERCICE 2

1. Montrer que, pour tout nombre réel t : $-1 \leqslant \dfrac{2t}{1+t^2} \leqslant 1$.

2. On désigne désormais par f une fonction dérivable d'une variable réelle telle que

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} \qquad (1)$$

   (a) Montrer que, pour tout nombre réel x : $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

   (b) Trouver toutes les fonctions constantes f vérifiant la relation (1).
   Dans la suite de l'exercice, on suppose que f n'est pas constante.

   (c) Montrer que, pour tout nombre réel x : $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

   (d) Calculer $f(0)$. On pose $a = f'(0)$.

   (e) En utilisant la définition de la dérivée, exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de a.

   (f) Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]-1,1[$ et que la fonction f^{-1} est dérivable sur cet intervalle.
   Calculer la dérivée de f^{-1}.

   (g) Expliciter $f^{-1}(y)$ en fonction de y et de a. Trouver enfin toutes les fonctions f non constantes, dérivables et vérifiant la relation (1).

EXERCICE 3

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la variance σ^2 existe et est non nulle. On suppose que X est symétrique, c'est-à-dire que X et $-X$ ont la même loi de probabilité.

1. Calculer l'espérance de X.

2. Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante de X, de loi de probabilité :

$$P(Z=1) = p \qquad P(Z=-1) = 1-p$$

   où p est un nombre réel tel que $0 < p < 1$. On pourra poser $q = 1-p$.

   (a) Montrer que la variable aléatoire ZX a la même loi que X.

   (b) Calculer la covariance des variables aléatoires X et ZX; montrer que le coefficient de corrélation de X et ZX ne dépend pas de σ^2.

3. On définit les variables aléatoires U, V et Y par les conditions

$$U = \begin{cases} 1 & \text{si } X \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } X < 0 \end{cases} \qquad V = \begin{cases} 1 & \text{si } X \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } X > 0 \end{cases} \qquad Y = U - V$$

   (a) Montrer que la variable aléatoire Y est symétrique.

   (b) On note $|X|$ la valeur absolue de X. Comparer X et $Y\,|X|$. En déduire la valeur du coefficient de corrélation de Y et $|X|$.

   (c) Montrer que les variables aléatoires Y et $|X|$ sont indépendantes si et seulement si $P(X=0) = 0$