CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1985

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Les parties I et II sont indépendantes.

On désigne par a et b des fonctions à valeurs réelles continues sur l'intervalle $[0,1]$. On suppose que, pour tout élément t de $[0,1]$, $a(t) \geqslant 0$.
L'objet du problème est d'étudier un procédé d'approximation d'une fonction f à valeurs réelles de classe C^4 sur $[0,1]$, sachant que, pour tout élément t de $[0,1]$,

$$f''(t) - a(t)f(t) = b(t)$$

et

$$f(0) = \lambda, \qquad f(1) = \mu,$$

où λ et μ sont des nombres réels donnés.
A cet effet, on introduit une subdivision $(t_0, t_1, \ldots, t_{n+1})$ à pas constant $h = 1/(n+1)$ de l'intervalle $[0,1]$, où n est un nombre entier strictement supérieur à 2. Autrement dit, pour tout nombre entier naturel k tel que $k \leqslant n+1$, $t_k = kh$.
Dans la partie I, on montre que, pour approcher f sur $[0,1]$, il suffit de connaître une valeur approchée u_k de $f(t_k)$ en chaque point t_k. Les parties II et III décrivent un algorithme de construction des valeurs approchées u_k.
Pour toute fonction g à valeurs réelles de classe C^p sur l'intervalle $[0,1]$, on pose :

$$M_p(g) = \sup_{t\in[0,1]} \left| g^{(p)}(t) \right|$$

PARTIE I : Approximation de f par une fonction affine par morceaux.

1. Soient g une fonction à valeurs réelles de classe C^2 sur $[0,1]$ et (α, β) un couple d'éléments de $[0,1]$ tel que $\alpha < \beta$. On suppose que $g(\alpha) = g(\beta) = 0$.

   (a) Soit G la fonction définie sur $[0,1]$ par les relations :

   $$G(t) = \frac{g(t)}{t-\alpha} \quad \text{si } t \neq \alpha \qquad \text{et} \qquad G(\alpha) = g'(\alpha)$$

   Prouver que G est continue, puis qu'elle est de classe C^1.
   Prouver que, pour tout élément t de $[0,1]$,

   $$\left|G'(t)\right| \leqslant \frac{1}{2} M_2(g)$$

   (b) En conclure que, pour tout élément t de $[0,1]$,

   $$|g(t)| \leqslant \frac{1}{2} \left|(t-\alpha)(t-\beta)\right| M_2(g)$$

2. Soit ψ_h la fonction définie sur $[0,1]$ par les conditions suivantes :

   - pour tout entier k appartenant à $[0, n+1]$, $\psi_h(t_k) = f(t_k)$;
   - pour tout entier k appartenant à $[0, n]$, la restriction de ψ_h à l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ est affine.

   Montrer que, pour tout élément t de $[0,1]$,

   $$|f(t) - \psi_h(t)| \leqslant \frac{h^2}{8} M_2(f)$$

3. Soient enfin $(u_0, u_1, \ldots, u_{n+1})$ une suite de nombres réels et φ_h la fonction définie sur $[0,1]$ par les conditions suivantes :

   - pour tout entier k appartenant à $[0, n+1]$, $\varphi_h(t_k) = u_k$;
   - pour tout entier k appartenant à $[0, n]$, la restriction de φ_h à l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ est affine.

   Montrer que, pour tout élément t de $[0,1]$,

   $$|f(t) - \varphi_h(t)| \leqslant \frac{h^2}{2} M_2(f) \qquad \text{où} \qquad \delta_h = \sup_{0 \leqslant k \leqslant n+1} |f(t_k) - u_k|$$

PARTIE II : Algorithme de résolution d'un système linéaire.

Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ des suites de nombres réels. On suppose que, pour tout entier k appartenant à $[1, n]$, $a_k \geqslant 2$. On considère le système d'équations linéaires :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccccc}
a_1 u_1 & - & u_2 & & & & & & & = & b_1 \\
-u_1 & + & a_2 u_2 & - & u_3 & & & & & = & b_2 \\
 & - & u_2 & + & a_3 u_3 & - & u_4 & & & = & b_3 \\
 & & \cdots & & \cdots & & & & & & \cdots \\
 & & & - & u_{n-2} & + & a_{n-1} u_{n-1} & - & u_n & = & b_{n-1} \\
 & & & & & - & u_{n-1} & + & a_n u_n & = & b_n
\end{array} \right.$$

1. Montrer que l'on peut construire une suite $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ de nombres réels appartenant à l'intervalle $]0,1]$, satisfaisant à la condition initiale $c_1 = \dfrac{1}{a_1}$ et à la relation de récurrence :
$$c_{k+1} = \frac{1}{a_{k+1} - c_k} \qquad \text{où} \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1$$
2. Soit $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ la suite de nombres réels définie par la condition initiale $d_1 = b_1 c_1$ et la relation de récurrence :
$$d_{k+1} = (b_{k+1} + d_k)c_{k+1} \qquad \text{où} \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1$$
Montrer que le système (1) admet une solution et une seule, et que celle-ci est déterminée par les relations :
$$\begin{cases} u_n = d_n \\ u_k = d_k + c_k u_{k+1} \quad \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n-1 \end{cases}$$
3. Montrer que si les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont positifs (au sens large), il en est de même pour les nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n$.
4. Dans cette question, on suppose que $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$. Montrer que, pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,
$$0 \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{2}(n+1)^2$$
5. Dans le cas général, montrer que:
$$\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |u_k| \leqslant \frac{1}{2}(n+1)^2 \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |b_k|$$

PARTIE III : Obtention de valeurs approchées de f aux points t_k.

1. Soit t un nombre réel tel que $[t-h, t+h]$ soit contenu dans $[0,1]$. Montrer que:
$$\left| f(t+h) + f(t-h) - 2f(t) - h^2 f''(t) \right| \leqslant \frac{h^4}{12} M_4(f)$$
À cet effet, on pourra introduire la fonction auxiliaire F définie sur l'intervalle $[-h, h]$ par la relation :
$$F(x) = f(t+x) + f(t-x) - 2f(t) - x^2 f''(t)$$
On calculera les dérivées successives de F jusqu'à l'ordre 3 et en particulier leurs valeurs à l'origine, et on majorera $|F'''(x)|$ à l'aide de $M_4(f)$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,
$$(2) \qquad -f(t_{k-1} + \left[2 + h^2 a(t_k)\right] f(t_k) - f(t_{k+1}) = -h^2 b(t_k) + \varepsilon_k, \qquad \text{où } |\varepsilon_k| \leqslant \frac{h^4}{12} M_4(f)$$
3. On connaît déjà $f(t_0) = f(0) = \lambda$ et $f(t_{n+1}) = f(1) = \mu$.
Pour approcher $f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n)$, on remplace les relations (2) par le système linéaire :
$$\begin{cases} -u_{k-1} + \left(2 + h^2 a(t_k)\right) u_k - u_{k+1} = -h^2 b(t_k) \quad \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n \\ u_0 = \lambda \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \mu \end{cases}$$
Montrer comment, à l'aide de la partie II, on peut construire la suite $(u_0, u_1, \ldots, u_{n+1})$.
4. Cette suite étant ainsi définie, établir que :
$$\delta_h \leqslant \frac{h^2}{24} M_4(f)$$
En conclure que, pour tout élément t de $[0,1]$:
$$|f(t) - \varphi_h(t)| \leqslant A h^2, \quad \text{où } A = \frac{1}{8} M_2(f) + \frac{1}{24} M_4(f)$$