CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1984

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Partie I

Soit n un nombre entier naturel non nul. On considère les fonctions numériques f_n, g_n et h_n définies sur l'intervalle $[0, n]$ par les relations:

$$f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n, \qquad g_n(t) = e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n, \qquad h_n(t) = e^t g_n'(t)$$

où g_n' est la dérivée de g_n.

1. Etudier la variation de h_n. Dresser le tableau de variation de cette fonction.
   En déduire la variation de g_n. Montrer en particulier que g_n est à valeurs positives et qu'il existe un élément x_n de $[0, n]$ et un seul tel que, pour tout élément t de $[0, n]$, $g_n(t) \leqslant g_n(x_n)$.
2. Montrer que $g_n(x_n) \leqslant \dfrac{1}{ne}$.
3. Soit x un nombre réel strictement positif.
   (a) Etudier la convergence des intégrales:

$$I_n(x) = \int_0^n f_n(t) t^{x-1} dt \text{ et } \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} t$$

(b) Soit c un réel strictement positif. Montrer que si $n \geqslant c$, alors:

$$0 \leqslant \Gamma(x) - I_n(x) \leqslant \int_0^c g_n(t) t^{x-1} dt + \int_c^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

4. En déduire que la suite de terme général $I_n(x)$ converge vers $\Gamma(x)$.

Partie II

On admet la formule de Stirling:

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} (\frac{n}{e})^n \sqrt{2n\pi}$$

Soit α un nombre réel strictement positif. On pose:

$$P_1(\alpha) = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 2, \quad P_n(\alpha) = (\alpha+1)(2\alpha+1)\dots[(n-1)\alpha+1]$$

$$J_0(\alpha) = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 1, \quad J_n(\alpha) = \int_0^1 (1-t^\alpha)^n dt$$

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n: $\quad (1+n\alpha)J_n(\alpha) = n\alpha J_{n-1}(\alpha)$.
2. En déduire la valeur de $J_n(\alpha)$, que l'on exprimera à l'aide de $P_n(\alpha)$.
3. En effectuant un changement de variable, trouver une relation entre $J_n(\alpha)$ et $I_n(\frac{1}{\alpha})$.
   En déduire un équivalent de la suite de terme général $P_n(\alpha)$.
4. Soit désormais x un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre entier naturel non nul p, on pose:

   $$Q_n(p,x) = x(x+p)(x+2p)\dots[x+(n-1)p]$$

   Exprimer $Q_n(p,x)$ à l'aide de $P_n(\frac{p}{x})$. En déduire un équivalent de la suite de terme général $Q_n(p,x)$, les nombres p et x étant fixés.
5. (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n : $Q_n(2,x)Q_n(2,x+1) = Q_{2n}(1,x)$.

   (b) En déduire une relation entre $\Gamma(x)$, $\Gamma(\frac{x}{2})$ et $\Gamma(\frac{x+1}{2})$.

   (c) En déduire la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$, puis, à l'aide d'un changement de variable, la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} t$.