CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1983

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On désigne par $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geqslant 0$.
Soit a un nombre réel.

PARTIE I

Dans cette partie, on suppose $a \geqslant 0$.
Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence :

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = a + \frac{1-e^{-n}}{2} u_n$$

et la condition initiale $u_0 = a$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $\quad u_n \leqslant 2a$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.
2. Soit (v_n) une suite de nombres réels satisfaisant à la relation :

$$(2) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} \leqslant a + \frac{1-e^{-n}}{2} v_n$$

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $\quad v_n \leqslant u_n$.

(b) Montrer que la suite (v_n) est majorée.

(c) A l'aide d'un contre-exemple, montrer que la suite (v_n) n'est pas nécessairement convergente.

3. (a) Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0,1]$, $\quad e^{-x} \leqslant 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$.

   (b) Montrer que $\int\limits_0^1 e^{-x^3} dx \leqslant \dfrac{5}{6}$.

   (c) Montrer que l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^3} dx$ est convergente, et que $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^3} dx \leqslant \dfrac{1}{2}$.

4. Soit (w_n) une suite de nombres réels satisfaisant à la relation :

$$(3) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} \leqslant a + \frac{w_n}{4} \int_0^n e^{-x^3} dx$$

Montrer que la suite (w_n) est majorée.

PARTIE II

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles.

1. Montrer que, pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$, l'ensemble des nombres réels $f(t)$, où $t \in [0,x]$, admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. On note $g(x)$ cette borne supérieure.
   Montrer que la fonction g ainsi définie est croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. On suppose dans cette question que f vérifie la relation :

$$(4) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leqslant a + \int_0^x f(t)e^{-t} dt$$

   (a) On suppose, dans cette question uniquement, que f est croissante. Montrer que, pour tout entier naturel k et pour tout nombre réel x tel que $x \geqslant k$,

$$f(x) \leqslant a + \int_0^k f(t)e^{-t} dt + (e^{-k} - e^{-x}) f(x)$$

   En déduire que f est majorée.

   (b) On suppose, dans cette question uniquement, que pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$, $f(x)$ appartient $\mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction g définie dans la question **II.1** vérifie la relation (4), c'est-à-dire que :

$$g(x) \leqslant a + \int_0^x g(t)e^{-t} dt$$

   En déduire que f est majorée.

   (c) On suppose seulement que f vérifie la relation (4). Montrer que f est majorée.

3. On suppose que la fonction f vérifie la condition suivante :

$$(5) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leqslant a + \int_0^x f(t)e^{-t^3} dt$$

Montrer que f est majorée.

4. Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} h(t)dt$ soit convergente. On suppose que la fonction f vérifie la relation suivante :

$$(6) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leqslant a + \int\limits_0^x f(t)h(t)dt$$

Montrer que f est majorée.

5. On suppose de nouveau que f vérifie la relation (4). Soit φ la fonction définie $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$\varphi(x) = f(x) - ae^{1-e^{-x}}$$

(a) Montrer que, pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$,

$$\varphi(x) \leqslant \int\limits_0^x \varphi(x)e^{-t}dt$$

(b) Soient c un élément de $\mathbb{R}_+$ et $\lambda = \sup\limits_{x\in[0,c]} \varphi(x)$.
Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout élément x de $[0, c]$,

$$\varphi(x) \leqslant \lambda \frac{(1 - e^{-x})^n}{n!}$$

(c) Montrer que, pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$,

$$f(x) \leqslant ae^{1-e^{-x}}$$

(d) Soit ψ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que, pour toute fonction continue vérifiant la relation (4) et pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$, $\quad f(x) \leqslant \psi(x)$.
Montrer que, pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$,

$$\psi(x) \geqslant ae^{1-e^{-x}}$$