CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES II

Année 1982

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PARTIE I

1. Soit φ la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par la relation

$$\varphi(x) = \ln x - \frac{1}{x^2}$$

   (a) Etudier la variation de φ. Construire la courbe représentative de φ.
   (b) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution et une seule. Soit α cette solution.
   (c) Montrer que $1 < \alpha < e$.
   (d) Déterminer l'entier naturel k tel que $10^{-3}k \leqslant \alpha < 10^{-3}(k+1)$.

2. Soit f_λ la fonction numérique définie sur $]-\lambda, +\infty[$ par la relation

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda + x} - \lambda \ln(\lambda + x)$$

   (a) Montrer que l'équation $f_\lambda(x) = 0$ admet une solution et une seule. Soit x_λ cette solution.
   (b) Montrer que $1 < \lambda + x_\lambda$.
   (c) Montrer que $\lambda + x_\lambda$ admet une limite lorsque λ tend vers $+\infty$, et calculer cette limite.

PARTIE II

Soit g_λ la fonction numérique définie sur $]-\lambda, +\infty[$ par la relation

$$g_\lambda(x) = e^{-\lambda x} - \ln(x+\lambda)$$

1. (a) Calculer la dérivée g'_λ de g_λ. A l'aide de la première partie, déterminer le signe de $g'_\lambda(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variation de g_λ. On pose $y_\lambda = g_\lambda(x_\lambda)$.
   (c) Calculer $g'_\lambda(0)$. A l'aide de la première partie, déterminer le signe de x_λ suivant la position de λ par rapport à α.
   (d) En calculant $g_\lambda\left(-\dfrac{\lambda}{2}\right)$, trouver une minoration de y_λ.
   (e) Montrer que x_λ et y_λ admettent des limites (finies ou infinies) lorsque λ tend vers $+\infty$. Déterminer ces limites.
2. Dans chacun des cas $\lambda = 1$ et $\lambda = 5$, déterminer l'élément p_λ de $\mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{p_\lambda}{100} \leqslant x_\lambda < \dfrac{p_\lambda + 1}{100}$, et calculer $g_\lambda\left(\dfrac{p_\lambda + \frac{1}{2}}{100}\right)$.
3. (a) Construire sur un même graphique les courbes représentatives de g_1 et g_5. On prendra la même unité sur les deux axes et on ne dessinera que les pointa des courbes dont les coordonnées sont comprises entre -5 et 5.
   (b) Montrer que ces courbes ont un point commun P et un seul. (On pourra considérer la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par la relation
   $$h(x) = e^{4x}\ln(x+1) - \ln(x+5)$$
   et étudier la variation de h.)
   (c) Déterminer des valeurs approchées des coordonnées de P à $0,1$ près.

PARTIE III

Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx}\ln(n+x)dx$$

1. (a) Montrer que l'intégrale I_n converge.
   (b) Montrer que
   $$I_n = \frac{\ln n}{n} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)}dx$$
   En déduire que
   $$\frac{\ln n}{n} \leqslant I_n \leqslant \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^3}$$
   (c) Montrer que
   $$I_n \geqslant \frac{\ln n}{n} + \int_0^{n/10} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)}dx \geqslant \frac{\ln n}{n} + \frac{10}{11}\frac{1}{n^3}(1 - e^{-n^2/10})$$
2. En déduire une valeur approchée de I'_5 de I_5 à 0.001 près.