CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES II

Année 1981

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PARTIE I

A tout a réel, on associe f_a , fonction réelle d'une variable réelle définie par : $f_a(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x-a}}$.
Soit C_a la courbe représentative de f_a.

1. Indiquer pour quelles valeurs de x, $f_a(x)$ est défini.
2. Dresser, en fonction de a, les différents tableaux de variation de f_a.
3. Etudier les branches infinies de C_a
4. Rechercher les éventuels points d'inflexion de C_a.
5. Trouver la courbe Γ décrite par le point à tangente horizontale de C_a lorsque a varie.
6. Construire sur un même graphique, avec des échelles appropriées (non nécessairement les mêmes sur les axes Ox et Oy), les courbes Γ, C_{-1}, C_0 et C_1.

PARTIE II

On considère la fonction g_a, fonction réelle d'une variable réelle définie par : $g_a(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{|x-a|}}$.

Soit D_a la courbe représentative de g_a.

1. Reprendre, pour la famille des courbes D_a, les questions 1,2,3,4 de la première partie.
   Construire sur un même graphique les courbes D_{-1}, D_0, D_1.

2. Déterminer le nombre de points d'intersection de la courbe D_1 et de la droite d'équation $y = \lambda$.
   Donner une valeur approchée, à 10^{-1} près par défaut, des abscisses des points de D_1 d'ordonnées $\lambda = 1$ et $\lambda = 4$ respectivement.

PARTIE III

1. Démontrer que, pour tout $x > a$, l'intégrale $\int\limits_a^x f_a(t)dt$ converge. Démontrer que l'intégrale $\int\limits_a^{+\infty} f_a(t)dt$ diverge.

2. Déterminer deux réels α et β tels que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x-a}} - \sqrt{x}(\alpha x+\beta)\right) = 0$$

   Quelle est la nature de l'intégrale $\int\limits_A^{+\infty}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x-a}} - \sqrt{x}(\alpha x+\beta)\right)dx$, où A est un réel strictement supérieur à a et à 0 ?

3. Déterminer un réel γ tel que l'intégrale $\int\limits_A^{+\infty}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x-a}} - \sqrt{x}(\alpha x+\beta+\dfrac{\gamma}{x})\right)dx$ soit convergente.

4. Calculer $I_n = \int\limits_a^n \dfrac{x^2}{\sqrt{x-a}}dx$, pour n entier strictement supérieur au paramètre a.

5. Soit $S_n = \sum\limits_{k=N+1}^{n} \dfrac{k^2}{\sqrt{k-a}}$ où N est un entier strictement plus grand que $\left|\dfrac{4a}{3}\right|$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
   Etablir la double inégalité :

$$I_{n+1} - I_{N+1} \geqslant S_n \geqslant I_n - I_N$$

   En déduire un équivalent de S_n quand n tend vers $+\infty$.

6. On pose $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ et $u_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}} - 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$.
   Montrer que la série de terme général u_k est convergente.
   Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ et en déduire que T_n est équivalent à $2\sqrt{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

7. On pose $V_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k\sqrt{k}$ et $W_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.
   En utilisant la définition des intégrales $\int\limits_0^1 x\sqrt{x}dx$ et $\int\limits_0^1 \sqrt{x}dx$ par les sommes de Riemann, trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{V_n}{n^{5/2}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{W_n}{n^{3/2}}$.

8. Retrouver, à l'aide des questions 3, 6, 7 de la troisième partie, un équivalent simple de S_n quand n tend vers $+\infty$.