CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1981

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Les trois parties sont indépendantes

On désigne par $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs, $\mathbb{R}_-$ celui des réels négatifs, $\mathbb{R}^\times$ celui des réels strictement positifs. On se donne $\alpha \in \mathbb{R}^\times$ et une application continue f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^\times$.

PARTIE I

Soit X une variable aléatoire réelle, définie sur l'espace probabilisé (Ω, A, P), de fonction de répartition F. On suppose que F est continue, nulle sur R_-, dérivable sur $\mathbb{R}^\times$. On suppose, en outre, que l'on a la relation :

$$\forall t \in \mathbb{R}^\times, \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h} P(X \leqslant t+h / X \geqslant t) = f(t)(P(X \leqslant t))^\alpha$$

(on note $P(A)$ la probabilité de A, $P(A/B)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B).

1. Montrer que F vérifie :
$$\forall t \in \mathbb{R}^\times, \quad F'(t) = f(t)(F(t))^\alpha(1 - F(t)) \qquad (1)$$
($F'(t)$ est la dérivée de F au point t).

2. Montrer que F est dérivable à droite en 0 et donner $F'_d(0)$.

PARTIE II

On désigne maintenant par F une application de $\mathbb{R}_+$ dans $[0, 1[$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant (1) et la condition supplémentaire :

$$x = 0 \Longleftrightarrow F(x) = 0.$$

1. Montrer que F est strictement croissante, et admet une limite finie $L \in]0, 1]$ à l'infini.
2. Soit $x > 0$.
   (a) Montrer que l'application H définie sur $]0, x]$ par : $\quad H(y) = \int\limits_{F(y)}^{F(x)} \frac{dt}{t^\alpha(1-t)} - \int\limits_{y}^{x} f(t)dt$ est dérivable sur $]0, x]$ et calculer $H'(y)$.

   (b) Montrer que l'intégrale impropre $\int\limits_0^{F(x)} \frac{dt}{t^\alpha(1-t)}$ est convergente et vaut $\int\limits_0^x f(t)dt$.
   En déduire que $\alpha < 1$.

   (c) Que dire de $\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$?

3. (a) Montrer que, si α est rationnel, un changement de variable simple ramène le calcul de $\int\limits_0^{F(x)} \frac{dt}{t^\alpha(1-t)}$ à l'intégration d'une fraction rationnelle.

   (b) Si $\alpha = \frac{1}{2}$, montrer que $F(x) = {}^2(\frac{1}{2} \int\limits_0^x f(t)dt)$.
   Examiner le cas où $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

4. Soit $G : [0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{t^\alpha(1-t)}$.
   (a) En calculant $G(x) - \int\limits_0^x \frac{dt}{t^\alpha}$, et en utilisant l'identité $\dfrac{1}{1-t} = 1 + t + \cdots + t^n + \dfrac{t^{n+1}}{1-t}$, donner un développement limité, en 0, à l'ordre n, de $x^{\alpha-2}G(x) - \dfrac{1}{x(1-\alpha)}$.

   (b) En déduire, si $f(0) \neq 0$, un équivalent simple de $F(x)$ au voisinage de 0.

5. Montrer les inégalités :
$$\forall x \in [0, 1[, \quad \ln(\frac{1}{1-x}) \leqslant G(x) < \ln(\frac{1}{1-x}) + \frac{1}{1-\alpha}$$
   En déduire, pour $x \in \mathbb{R}_+$, l'encadrement :
$$1 - e^{\frac{1}{1-\alpha} - \int\limits_0^x f(t)dt} t < F(x) \leqslant 1 - e^{-\int\limits_0^x f(t)dt}$$

6. Montrer que, si $\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge, F est la restriction à $\mathbb{R}_+$ de la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire.

PARTIE III

Soit x_0 fixé dans $]0, 1[$. On étudie dans cette partie la fonction g de la variable réelle z définie par

$$g(z) = \int\limits_0^{x_0} \frac{t^z dt}{1-t}$$

1. Montrer que le domaine de définition de g est $]-1,+\infty[$.
   Calculer $g(0)$, $g(1)$, et plus généralement $g(n)$ pour n entier naturel.

2. (a) Montrer que g est décroissante sur $]-1,+\infty[$.

   (b) Montrer les inégalités : $\dfrac{x_0^{z+1}}{z+1} \leqslant g(z) \leqslant \dfrac{x_0^{z+1}}{(z+1)(1-x_0)}$, en déduire le comportement de g quand z tend vers -1 ou vers $+\infty$.

   (c) En déduire que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k} x_0^k$ est convergente, et donner sa somme.

3. Montrer que les intégrales $\int\limits_0^{x_0} \dfrac{t^z \ln t}{1-t} dt$ et $\int\limits_0^{x_0} \dfrac{(\ln t)^2 t^z}{1-t} dt$ existent si $z > -1$.
   (on ne cherchera pas à les calculer).

4. Soit $a > -1$, et z fixé dans $]a, +\infty[$. Soit h, variable, non nul, tel que $z + h > a$.

   (a) Montrer, qu'à chaque h, on peut associer une application θ, à valeurs dans $]0,1[$, telle que :

   $$\frac{1}{h}(g(z+h) - g(z)) - \int\limits_0^{x_0} \frac{t^z \ln t}{1-t} dt = \frac{h}{2} \int\limits_0^{x_0} \frac{(\ln t)^2 t^{z+\theta(t)h}}{1-t} dt$$

   on pourra utiliser, après l'avoir justifiée, l'égalité : $t^h - 1 - h \ln t = \dfrac{h^2}{2} (\ln t)^2 t^{h\theta}$ pour un $\theta \in]0,1[$.

   (b) En déduire que g est dérivable en z et donner $g'(z)$.

   (c) Où g est-elle dérivable ?

5. Tracer l'allure du graphe de g en repère orthonormé.