CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1980

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème on désigne par n un naturel strictement positif, par I l'intervalle $[-1,+1]$.

PARTIE I

Pour $x \in I$, on pose $T_0(x) = 1$ et $T_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$.

1. Expliciter les polynômes T_1, T_2, T_3.
Prouver que T_n est un polynôme en x de degré n et calculer le coefficient de x^n. (On pourra poser $x = \cos\theta$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

2. Montrer que T_n, $n \in \mathbb{N}^\times$, admet exactement n racines réelles, distinctes, toutes dans l'intervalle I. On les note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en les classant par valeurs décroissantes. Expliciter x_j en fonction de l'angle $\dfrac{2j-1}{n}\pi$.

3. Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions numériques continues sur I.

   (a) Montrer que, pour tout $f \in E$, l'intégrale $J(f) = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ existe.

   (b) Calculer, à l'aide du changement de variable $x = \cos t$, les intégrales suivantes : $J(1)$, $J(T_n^2)$, $J(T_n.T_m)$ avec $m \neq n$.

   (c) Vérifier, rapidement, que les polynômes $T_0, T_1, \ldots, T_n$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.
   En déduire que, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $J(T_n, P) = 0$. Que vaut $J(T_n, P)$ si P est de degré n ?

PARTIE II

On se donne dans cette partie n nombres réels distincts de I : $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
On pose, pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $L_j(x) = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq j}} \left(\dfrac{x - x_k}{x_j - x_k}\right)$ et on note L_j' le polynôme dérivé de L_j.
($\prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq j}} (a_k)$ désigne le produit des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ excepté a_j.)

1. Calculer, en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$, le nombre réel $L_j(x_i)$.

2. Soit F l'application de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad F(P) = \big(P(x_1), \ldots, P(x_n), P'(x_1), \ldots, P'(x_n)\big)$$

(On note P' le polynôme dérivé de P.)

   (a) Vérifier que F est linéaire.
   (b) Montrer que le noyau de F est réduit au polynôme nul.
   (c) En déduire que F est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Utiliser la question précédente pour prouver qu'il existe un et un seul polynôme de degré au plus $2n-1$, que l'on note $\tilde{f}$, tel que :

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \tilde{f}(x_j) = f(x_j) \qquad \text{et} \qquad \tilde{f}'(x_j) = f'(x_j)$$

4. Vérifier que :

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) L_j^2(x) + \sum_{j=1}^{n} \big(f'(x_j) - 2f(x_j)L_j'(x_j)\big)(x - x_j)L_j^2(x)$$

PARTIE III

Dans cette partie f est une fonction numérique $2n$ fois dérivable sur I et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n points donnés distincts de I.

1. On suppose que f s'annule ainsi que sa dérivée f' en chacun des x_i. On se donne $x \in I$ distinct des x_i et on définit une fonction φ par :

$$\varphi(t) = f(t) - A(t - x_1)^2(t - x_2)^2 \ldots (t - x_n)^2$$

où la constante réelle A est déterminée par la condition $\varphi(x) = 0$.

   (a) Montrer, en utilisant le théorème de Rolle, que la dérivée φ' s'annule en au moins $2n$ points distincts de I.
   (b) En déduire que chaque dérivée d'ordre p, $\varphi^{(p)}$, $1 \leqslant p \leqslant 2n$, s'annule en au moins $2n - p + 1$ points distincts de I.
   (c) En déduire qu'il existe au moins un $c \in I$ tel que $f(x) = (x - x_1)^2 \ldots (x - x_n)^2 \dfrac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}$.
   (d) Est-ce encore vrai si $x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$?

2. On ne suppose plus que f et f' s'annulent nécessairement aux points $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et on adopte les notations du **3** de la deuxième partie. Montrer que :

$$(1) \qquad \forall x \in I, \quad \exists c \in I, \quad f(x) = \tilde{f}(x) + (x - x_1)^2(x - x_2)^2 \ldots (x - x_n)^2 \frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}$$

PARTIE IV

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction $2n$ fois continûment dérivable sur I. Dans cette partie, on choisit pour n-uple $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le n-uple constitué des n racines du polynôme T_n.
Pour chaque $x \in I$ on fait choix d'un $c \in I$ satisfaisant à l'égalité (1) du **2** de la troisième partie.

1. Montrer que, quel que soit $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{(x - x_j)L_j^2(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = 0$.
   (On pourra utiliser le **3.c** de la première partie.)

2. On pose $a_j = J(L_j^2)$.
   Montrer, à l'aide des parties II et III, qu'il existe un réel $d \in I$ tel que :
$$J(f) = \sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j) + \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{f^{(2n)}(d)}{(2n)!}$$

3. On dit que la somme $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j f(x_j)$, notée $\tilde{J}(f)$, est une valeur approchée de l'intégrale $J(f)$.
   Montrer que $\tilde{J}(f) = J(f)$ si f est un polynôme de degré au plus $2n - 1$.
   N.B. On peut démontrer, ce que l'on ne demande pas de faire, que les coefficients $a_1, \dots, a_n$ sont tous égaux à $\dfrac{\pi}{n}$.