CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES II

Année 1979

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PARTIE I

1. Calculer les inverses des matrices réelles

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. On note ${}^tM$ la transposée d'une matrice M. Montrer qu'il existe une matrice J telle que ${}^tJ = J$ et que, pour tous les nombres réels x, y, z,

$$x^2 + y^2 - z^2 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3. Montrer que l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre trois M telles que

$${}^tMJM = J$$

est un groupe multiplicatif, que l'on notera G.

4. Montrer que A, B et C appartiennent a G.

PARTIE II

1. Montrer que si x, y, z sont trois entiers rationnels, les nombres

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2(x+z)(y+z) \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 - z^2 + 2(x-z)(y-z)$$

   sont des carrés d'entiers naturels.

2. Montrer que les relations

$$z_1 - x_1 = y + z, \quad z_1 - y_1 = x + z, \quad x_1 + y_1 - z_1 = x + y + z$$

   sont équivalentes à une relation matricielle

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   où H est une matrice constante que l'on déterminera.

3. On appelle triplet rectangulaire tout triplet (x, y, z) d'entiers naturels sans diviseur commun autre que 1 et tels que

$$x^2 + y^2 = z^2$$

   Soit (x, y, z) un triplet rectangulaire tel que $z > 1$. Posant

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   montrer que l'un des triplets (x', y', z'), $(-x', y', z')$ ou $(x', -y', z')$ est rectangulaire et que l'on a

$$1 \leqslant z' \leqslant z - 1$$

4. Imaginer un algorithme transformant, en un nombre fini d'étapes, par des produits matriciels comme ci-dessus, un triplet rectangulaire quelconque, en $(0, 1, 1)$.

5. Donner dix triplets rectangulaires distincts.

PARTIE III

1. Soit E l'ensemble des suites réelles (a_n) telles que, pour tout n :

$$a_{n+3} - 7a_{n+2} + 7a_{n+1} - a_n = 0$$

   Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 3 dont on déterminera une base formée d'applications de la forme $n \mapsto r^n$.

2. Déterminer (a_n) sachant que $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 0$. Calculer alors a_3 et a_4.

3. Déterminer (a_n) sachant que $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

4. Déterminer (a_n) sachant que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$.

PARTIE IV

On considère toujours la matrice A définie dans la première partie.

1. Montrer que A^3 est combinaison linéaire de I, A et A^2.
2. Montrer qu'il existe trois suites (u_n), (v_n), (w_n) telles que, pour tout n :

$$A^n = u_n I + v_n A + w_n A^2$$

   et que ces suites appartiennent à l'espace E défini au **1** de la troisième partie.
3. En déduire une méthode de calcul de A^n.
4. Déterminer une injection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ telle que, pour tout n, $f(n)$ soit un triplet rectangulaire.