

## CONCOURS D'ADMISSION

### Option scientifique

## MATHEMATIQUES I

Année 2001

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

### Problème

On étudie dans ce problème la suite  $(S_n)$  définie pour  $n \geq 1$  par:

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}$$

Dans la **partie I**, on détermine la limite  $S$  de la suite  $(S_n)$ . Dans les **parties II** et **III**, on explicite deux méthodes indépendantes permettant d'accélérer la convergence de  $(S_n)$  vers  $S$ .

#### Partie I

On considère pour tout nombre entier  $p \geq 0$  les deux intégrales suivantes:

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t) dt \quad J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2p}(t) dt.$$

1. Convergence de la suite  $\left(\frac{J_p}{I_p}\right)$ .

(a) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel  $t$  tel que  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ :  $t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)$ .

- (b) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier  $p \geq 0$ :  $0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1})$ .
- (c) Exprimer  $I_{p+1}$  en fonction de  $I_p$  en intégrant par parties l'intégrale  $I_{p+1}$ .  
*Indication: on pourra poser  $u'(t) = \cos(t)$  et  $v(t) = \cos^{2p+1}(t)$  dans l'intégration par parties.*
- (d) Dédire des résultats précédents que  $\frac{J_p}{I_p}$  tend vers 0 quand  $p$  tend vers  $+\infty$ .

2. Convergence et limite de la suite  $(S_n)$ .

- (a) Exprimer  $I_p$  en fonction de  $J_p$  et  $J_{p-1}$  en intégrant deux fois par parties l'intégrale  $I_p$  ( $p \geq 1$ ).
- (b) En déduire la relation suivante pour  $p \geq 1$ :

$$\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}.$$

- (c) Calculer  $J_0$  et  $I_0$ , puis déterminer la limite  $S$  de la suite  $(S_n)$ .

**Partie II**

On accélère ici la convergence de la suite  $(S_n)$  vers sa limite  $S$  par une méthode due à Stirling.  
 On désigne par :

- $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $]0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  et de limite nulle en  $+\infty$ .
- $f_k$  la fonction de  $E$  définie pour tout nombre entier naturel  $k$  par:

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f_k(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+k)} \text{ pour } k \geq 1.$$

$\Delta$  l'application associant à toute fonction  $f$  de  $E$  la fonction  $\Delta f$  définie pour  $x > 0$  par

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

1. Sommation de séries télescopiques.

- (a) Etablir que  $\Delta$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $E$ .
- (b) Etablir pour toute fonction  $f$  appartenant à  $E$  la convergence de la série  $\sum (\Delta f)(p)$  avec  $p \geq 1$  et calculer pour tout nombre entier naturel  $n$  les sommes suivantes:

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (\Delta f)(p) \quad \sum_{p=n+1}^{+\infty} (\Delta f)(p).$$

- (c) Exprimer  $\Delta f_{k-1}$  en fonction de  $k$  et de  $f_k$  pour  $k \geq 1$ .
- (d) Etablir pour tout nombre entier naturel  $k \geq 1$  la convergence de la série  $\sum f_k(p)$  et vérifier pour tout nombre entier naturel  $n$  que:

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k} \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}.$$

2. Accélération de la convergence de  $(S_n)$ .

- (a) Etablir la relation suivante pour  $p \geq 1$  et  $q \geq 1$ :

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^q (k-1)! f_k(p) = \frac{q!}{p} f_q(p).$$

(b) En déduire l'inégalité suivante pour  $n \geq 1$  et  $q \geq 1$ :

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^q \frac{(k-1)!}{k(n+1) \cdots (n+k)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2) \cdots (n+q)}.$$

(c) En déduire, l'entier  $q \geq 1$  étant fixé, une suite  $(S'_n)$  de nombres rationnels telle que:

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2) \cdots (n+q)}.$$

Expliciter  $S'_n$  et l'inégalité précédente lorsque  $q = 2$ .

(d) Ecrire en Pascal un algorithme calculant et affichant  $S'_n$  pour  $q = 2$  lorsque  $n$  est donné.

### Partie III

On accélère ici la convergence de la suite  $(S_n)$  vers sa limite  $S$  en effectuant un développement limité de  $S_n$  suivant les puissances de  $\frac{1}{n}$ .

- Démontrer qu'il existe une et une seule suite de nombres réels  $(u_n)$  telle que  $u_0 = 1$  et  $\sum_{p=1}^n \frac{u_{n-p}}{p!} = 0$  pour tout nombre entier  $n \geq 2$ .  
Etablir que les  $u_n$  sont rationnels et donner  $u_1, u_2, u_3, u_4$  sous forme de fraction irréductible.

#### 2. Etude des polynômes de Bernoulli.

(a) On considère la suite de polynômes  $(U_n)$  définie par:

$$U_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad U_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{u_{n-p} x^p}{p!} \quad \text{pour tout nombre entier } n \geq 1.$$

Préciser  $U_1, U_2, U_3, U_4$ .

Montrer que  $U'_n = U_{n-1}$  pour  $n \geq 1$  et  $U_n(0) = U_n(1)$  pour  $n \geq 2$ .

(b) On considère une suite de polynômes  $(V_n)$  définie par:

$$V_0 = 1, \quad V'_n = V_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 1 \quad \text{et} \quad V_n(0) = V_n(1) \quad \text{pour } n \geq 2$$

Etablir que  $V_n(p)(0) = V_{n-p}(0)$  pour  $0 \leq p \leq n$  et en déduire la formule suivante:

$$V_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{V_{n-p}(0) x^p}{p!}.$$

Etablir la formule suivante pour tout nombre entier  $n \geq 2$ :

$$\sum_{p=1}^n \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = 0.$$

Etablir enfin que  $V_n = U_n$  pour tout nombre entier naturel  $n$ .

- En déduire l'égalité  $U_n(x) = (-1)^n U_n(1-x)$  pour tout nombre entier naturel  $n$ .  
Montrer alors que  $u_{2p+1} = 0$  si  $p \geq 1$ .

#### 3. Accélération de la convergence de $(S_n)$ .

(a) Etablir pour  $p \geq 1$  la relation suivante, d'abord en supposant  $q = 1$ , puis  $q \geq 1$ :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \right) + \sum_{k=1}^q (2k)! u_{2k} \left( \frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}} \right) = (2q+2)! \int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x) dx}{(x+p)^{2q+3}}$$

(b) En déduire l'inégalité suivante pour  $n \geq 1$  et  $q \geq 1$ :

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \sum_{k=1}^q \frac{(2k)!u_{2k}}{n^{2k+1}} \right| \leq \frac{(2q+1)!M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$$

où  $M_{2q+2}$  désigne le maximum de la fonction continue  $x \mapsto |U_{2q+1}(x)|$  sur le segment  $[0, 1]$ .

(c) En déduire, l'entier  $q \geq 1$  étant fixé, une suite  $(S''_n)$  de nombres rationnels telle que:

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - S''_n \right| \leq \frac{(2q+1)!M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$$

Expliciter  $S''_n$  et l'inégalité précédente lorsque  $q = 2$ .

(d) Ecrire en Pascal un algorithme calculant et affichant  $S''_n$  pour  $q = 2$  lorsque  $n$  est donné.