# ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

**Option économique**

## MATHEMATIQUES III

**Année 2001**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

## EXERCICE 1 (Étude d'une suite de nombres réels)

On étudie dans cet exercice la suite $(S_n)$ définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

A cet effet, on introduit pour tout nombre entier $k \geqslant 0$ les deux intégrales suivantes:

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)\, dt \quad ; \quad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t)\, dt.$$

1. Convergence de la suite $(J_k/I_k)$.

   (a) Établir l'inégalité suivante pour tout nombre réel $t$ tel que $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$ :

   $$t \leqslant \frac{\pi}{2} \sin(t).$$

   (b) Établir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $k \geqslant 0$ :

   $$0 \leqslant J_k \leqslant \frac{\pi^2}{4} \left(I_k - I_{k+1}\right).$$

(c) Exprimer $I_{k+1}$ en fonction de $I_k$ en intégrant par parties l'intégrale $I_{k+1}$ (on pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2k+1}(t)$ dans l'intégration par parties).

(d) Déduire des résultats précédents que $J_k/I_k$ tend vers 0 quand $k$ tend vers $+\infty$.

2. Convergence et limite de la suite $(S_n)$.

(a) Exprimer $I_k$ en fonction de $J_k$ et $J_{k-1}$ en intégrant deux fois par parties l'intégrale $I_k$ ($k \geqslant 1$).

(b) En déduire la relation suivante pour $k \geqslant 1$ :

$$\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}.$$

(c) Calculer $J_0$ et $I_0$, puis déterminer la limite $S$ de la suite $(S_n)$.

(d) Établir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $k \geqslant 2$ :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

En déduire un encadrement de $S_{n+p} - S_n$ pour $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, puis de $S - S_n$, et montrer que:

$$0 \leqslant S_n - S + \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

*Autrement dit,* $S_n + \frac{1}{n}$ *constitue une valeur approchée de* $S$ *à* $\frac{1}{n^2}$ *près.*

(e) Écrire un programme en PASCAL calculant et affichant une valeur approchée du nombre $S$ à $10^{-6}$ près.

# EXERCICE 2 (Algèbre linéaire et étude d'une marche aléatoire)

Cet exercice a pour but l'étude d'une marche aléatoire sur les sommets d'un triangle, ce qui fait l'objet de la partie II. Dans la partie I, on aborde des questions préliminaires d'algèbre linéaire.

## Partie I

On associe à tout triplet $(x, y, z)$ de nombres réels la matrice $M(x, y, z)$ définie par :

$$M(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}.$$

La matrice $M(1, 0, 0)$ n'est autre que la matrice identité $I_3$ et la matrice $M(0, 1, 0)$ est notée $J$.

1. L'espace vectoriel $E$ des matrices $M(x, y, z)$.

(a) Calculer les matrices $J^2$ et $J^3$.

(b) Établir que l'ensemble $E$ des matrices de la forme $M(x, y, z)$ où $(x, y, z)$ décrit $\mathbb{R}^3$ constitue un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3.

(c) Établir que $(I_3, J, J^2)$ forme une base de $E$.

2. Matrices inversibles de l'espace vectoriel $E$.

(a) Calculer le produit $M(x, y, z) \times M(x', y', z')$ et montrer que celui-ci est élément de $E$.
Les matrices $M(x, y, z)$ et $M(x', y', z')$ commutent-elles ?

(b) En déduire l'égalité suivante:

$$M(x,y,z) \times M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right] I_3.$$

(c) Établir qu'une condition suffisante pour que $M(x,y,z)$ soit inversible est que $x$, $y$, $z$ soient tels que $x+y+z \neq 0$ et pas tous égaux. Quelle est alors la matrice inverse de $M(x,y,z)$ ?

(d) Établir enfin que cette condition suffisante d'inversibilité est également nécessaire.

3. Éléments propres des matrices $M(x,y,z)$

(a) Établir qu'un nombre réel $\lambda$ est valeur propre de $M(x,y,z)$ si et seulement si $M(x-\lambda,y,z)$ n'est pas inversible.

(b) Montrer que $x+y+z$ est valeur propre de $M(x,y,z)$ et préciser le sous-espace propre associé.

(c) On suppose ici que $y \neq z$. Montrer que $M(x,y,z)$ n'a pas d'autre valeur propre.
La matrice $M(x,y,z)$ est-elle diagonalisable ?

(d) On suppose ici que $y = z$. Montrer sans calcul que $M(x,y,y)$ est diagonalisable, et préciser quelles sont ses valeurs propres.

4. Diagonalisation des matrices $M(x,y,y)$.

(a) Calculer les produits matriciels suivants:

$$M(x,y,y)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad ; \quad M(x,y,y)\begin{pmatrix}+1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad M(x,y,y)\begin{pmatrix}+1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

(b) Déterminer deux matrices $P$ et $P^{-1}$ inverses l'une de l'autre telles que:

$$P^{-1}M(x,y,y)P = \begin{pmatrix}x+2y & 0 & 0\\ 0 & x-y & 0\\ 0 & 0 & x-y\end{pmatrix}.$$

(c) En déduire la relation suivante pour tout nombre entier naturel $n$ :

$$[M(x,y,y)]^n = \frac{1}{3}(x+2y)^n M(1,1,1) + \frac{1}{3}(x-y)^n M(2,-1,-1).$$

## Partie II

On désigne dans toute cette partie par $p$ un nombre réel tel que $0 < p < 1/2$ et on considère la marche aléatoire d'un point $S$ sur les sommets d'un triangle $ABC$.

A l'instant initial $t = 0$, le point $S$ est en $A$, et il se déplace ensuite selon les règles suivantes :

- Si $S$ est à l'instant $n$ au sommet $A$ du triangle : il est à l'instant $n+1$ au sommet $B$ avec la probabilité $p$, au sommet $C$ avec la probabilité $p$, ou encore au sommet $A$ avec la probabilité $1-2p$.

- Si $S$ est à l'instant $n$ au sommet $B$ du triangle : il est à l'instant $n+1$ au sommet $C$ avec la probabilité $p$, au sommet $A$ avec la probabilité $p$, ou encore au sommet $B$ avec la probabilité $1-2p$.

- Si $S$ est à l'instant $n$ au sommet $C$ du triangle : il est à l'instant $n+1$ au sommet $A$ avec la probabilité $p$, au sommet $B$ avec la probabilité $p$, ou encore au sommet $C$ avec la probabilité $1-2p$.

Pour tout nombre entier naturel $n$, on désigne enfin par :

- $A_n$ l'événement "le point $S$ est au sommet $A$ à l'instant $n$" et par $a_n$ sa probabilité.

- $B_n$ l'événement "le point $S$ est au sommet $B$ à l'instant $n$" et par $b_n$ sa probabilité.
- $C_n$ l'événement "le point $S$ est au sommet $C$ à l'instant $n$" et par $c_n$ sa probabilité.

1. Calcul des probabilités $a_n$, $b_n$, $c_n$.

   (a) Exprimer à l'aide de la formule des probabilités totales les probabilités $a_{n+1}$, $b_{n+1}$, $c_{n+1}$ en fonction des probabilités $a_n$, $b_n$, $c_n$.

   (b) En déduire une matrice $M$ telle qu'on ait pour tout nombre entier naturel $n$ :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

   (c) En déduire en fonction de $p$ les probabilités $a_n$, $b_n$, $c_n$ et leurs limites quand $n$ tend vers $+\infty$.

2. Nombres moyens des passages en $A$, $B$, $C$ entre les instants 1 et $n$.

   (a) On désigne dans cette question par $X_n$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque $S$ est au sommet $A$ à l'instant $n$, et prenant la valeur 0 sinon.
   Interpréter la variable aléatoire $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et son espérance $m_n = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$, puis établir que :

$$m_n = \frac{1}{3}\left[n + 2(1-3p)\frac{1-(1-3p)^n}{3p}\right].$$

   Donner un équivalent de $m_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

   (b) Déterminer les espérances des nombres de passage du point $S$ au sommet $B$ et au sommet $C$ entre les instants 1 et $n$ (compris).

3. Instant moyen du premier passage du point $S$ aux sommets $B$ ou $C$.

   (a) Déterminer la probabilité conditionnelle de l'événement $B_{n+1}$ sachant que l'événement $\overline{B_n}$ (événement contraire de $B_n$) est réalisé.

   (b) On note $T_B$ la variable aléatoire indiquant l'instant où, pour la première fois, le point $S$ est au sommet $B$. Déterminer la loi de $T_B$, puis l'espérance $E(T_B)$ de $T_B$.

   (c) Que dire de $T_C$, variable aléatoire indiquant l'instant où, pour la première fois, le point $S$ est au sommet $C$ ?