ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option économique

MATHEMATIQUES II

Année 1995

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le problème a pour objet l'étude des arrivées successives des clients à un guichet (distributeur de billets d'une banque, péage d'autoroute, etc.).
Dans la partie 1 sont établis quelques résultats préliminaires d'analyse.

PARTIE I

1. Étude d'une équation fonctionnelle.
   On considère une fonction continue non nulle $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant la relation :

   $$(1) \quad \forall (x;y) \in [0;+\infty[^2 \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

   (a) En faisant x = 0 dans la relation (1), déterminer la valeur de $f(0)$.

   (b) En faisant $x = y = \dfrac{t}{2}$ dans la relation (1), établir que $f(t) \geqslant 0$ lorsque $t > 0$.
   On se propose d'établir que $f(t) > 0$ lorsque $t > 0$.
   A cet effet, on raisonne par l'absurde et l'on suppose qu'il existe un nombre réel positif t_0 tel que$f(t_0) = 0$. En déduire que $f(\dfrac{t_0}{2}) = 0$, puis, pour tout entier $n \geqslant 1$, que

   $$f(\frac{t_0}{2^n}) = 0.$$

   Montrer qu'alors $f(0) = 0$, et conclure.

(c) Soit F la primitive sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction continue f s'annulant en 0. En intégrant sur $[0;1]$ la fonction $y \mapsto f(x+y)$, établir la relation :

$$(2) \quad \forall x > 0, \quad F(x+1) - F(x) = F(1)f(x).$$

Montrer à l'aide des questions précédentes que $F(1) > 0$, et en déduire que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

(d) Par dérivation de la fonction $y \mapsto f(x+y)$, établir que :

$$(3) \quad \forall x \geqslant 0, \quad f'(x) = f'(0)f(x)$$

(e) On pose $\lambda = -f'(0)$. Par dérivation de la fonction $g : x \mapsto \exp(\lambda x)f(x)$, déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de λ et de x.

(f) Réciproquement, montrer que la fonction f ainsi obtenue vérifie la relation (1).

2. <u>Étude d'une suite de fonctions.</u>

(a) On désigne par λ un réel strictement positif, et par n un entier naturel non nul.
Établir la convergence et déterminer en fonction de λ et n la valeur de l'intégrale :

$$K_n = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-\lambda t} dt$$

(b) On désigne alors par f_n la fonction définie par :

$$f_n(t) = \frac{1}{K_n} t^{n-1} e^{-\lambda t} \quad \text{si} \quad t > 0, \quad \text{et} \quad f_n(t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0.$$

Étudier pour $n \geqslant 2$ les variations de cette fonction f_n et déterminer son maximum M_n.

(c) Étudier les positions relatives des courbes représentatives de f_n et de f_{n+1}.

(d) Tracer sur une même figure les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5.

(e) Étudier le sens de variation et la convergence de la suite $(M_n)_{n \geqslant 2}$.
On admet que $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ (formule de Stirling).
Donner un équivalent de M_n quand n tend vers $+\infty$, et en déduire la limite de la suite $(M_n)_{n \geqslant 2}$.

PARTIE II

On considère les arrivées successives des clients à un guichet.
Étant donnés deux nombres réels t_1, t_2 tels que $t_1 < t_2$ on note $N(t_1;t_2)$ la variable aléatoire indiquant le nombre de clients se présentant au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1;t_2]$ et l'on note $P(N(t_1;t_2) = n)$ la probabilité pour que n clients exactement se présentent au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1;t_2]$.
(Par convention, on posera $P(N(t_1;t_1) = 0) = 1$, et $P(N(t_1;t_1) = n) = 0$ lorsque $n \geqslant 1$). On fait les hypothèses suivantes:

A) Étant donnés quatre nombres réels t_1, t_2, t_3, t_4 tels que $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4$, les variables aléatoires $N(t_1;t_2)$ et $N(t_3;t_4)$ sont indépendantes.
(Cette hypothèse signifie que les nombres de clients se présentant au cours de deux intervalles de temps disjoints sont indépendants).

B) Pour tout entier naturel n existe une fonction continue $p_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout couple de nombres réels $(t_1;t_2)$ tels que

$$t_1 \leqslant t_2 : P(N(t_1;t_2) = n) = p_n(t_2 - t_1).$$

(Cette hypothèse signifie que la probabilité pour que n clients se présentent entre les instants t_1 et t_2 dépend continûment de la durée $t_2 - t_1$).

1. <u>Équation fonctionnelle des fonctions p_n</u>
   On considère dans cette question deux nombres réels positifs x, y.

   (a) Exprimer $P(N(0;x+y)=0)$ en fonction de $P(N(0;x)=0)$ et de $P(N(x;x+y)=0)$, puis montrer que $p_0(x+y)=p_0(x)p_0(y)$.
   Déduire alors de la partie 1 l'expression de $p_0(x)$ en posant $\lambda=-p_0'(0)$.

   (b) Établir plus généralement que, pour tout entier naturel n, on a : $p_n(x+y)=\sum\limits_{k=0}^{n} p_{n-k}(x)p_k(y)$.

2. <u>Loi de l'instant d'arrivée du premier client.</u>
   On fixe un instant-origine et l'on note T_1 la variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{R}_+$) indiquant l'instant d'arrivée du premier client à partir de cet instant-origine.

   (a) Justifier l'égalité des événements " $N(0;x)=0$ " et " $T_1>x$ ".

   (b) Déduire des résultats précédents la fonction de répartition et une densité de la variable aléatoire T_1 dont on reconnaîtra la loi.

   (c) Déterminer enfin l'espérance et la variance de T_1.
   On conserve les hypothèses A et B et on fait, de plus, l'hypothèse complémentaire C :

   C) Étant donnés deux nombres réels t_1, t_2 tels que $t_1<t_2$, on suppose que la variable aléatoire $N(t_1;t_2)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t_2-t_1)$.

3. Loi de l'instant d'arrivée du $n^{ième}$ client.
   On fixe un instant-origine et l'on note T_n la variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{R}_+$) indiquant l'instant d'arrivée du $n^{ième}$ client ($n \geqslant 1$) à partir de cet instant-origine.

   (a) Comparer pour tout réel positif t les événements " $N(0;t) \leqslant n-1$ " et " $T_n>t$ ".

   (b) En déduire la fonction de répartition et une densité de T_2, de T_3, et plus généralement la fonction de répartition F_n et une densité f_n de T_n (loi gamma de paramètres n et λ).

   (c) Déterminer enfin l'espérance et la variance de cette variable aléatoire T_n.

4. Loi du nombre de clients procédant à un achat.
   On désigne par p (où $0<p<1$) la probabilité pour qu'un client se présentant au guichet procède à un achat et par $A(t_1;t_2)$ la variable aléatoire indiquant le nombre de clients se présentant au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1;t_2]$ et procédant à un achat. On admettra que les choix d'achats des clients sont indépendants.

   (a) Soient n et k deux entiers tels que $0<k<n$.
   Déterminer la probabilité conditionnelle $P((A(t_1;t_2)=k)/(N(t_1;t_2)=n))$ et reconnaître la loi de $A(t_1;t_2)$ conditionnée par l'événement $(N(t_1;t_2)=n)$.

   (b) À l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire la loi de la variable aléatoire $A(t_1;t_2)$ et préciser son espérance.

   (c) Donner, de même, la loi de la variable aléatoire $B(t_1;t_2)$ indiquant le nombre des clients se présentant au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1;t_2]$ et ne procédant pas à un achat.

   (d) Étudier enfin l'indépendance des variables aléatoires $A(t_1;t_2)$ et $B(t_1;t_2)$.