# ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

**Option économique**

MATHEMATIQUES I

**Année 1995**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

## Exercice 1

On étudie dans cet exercice une situation probabiliste décrite dans la question 4.
Les deux premières questions ont pour but d'étudier les puissances de la matrice carrée d'ordre 10 définie par :

$$M(a;b) = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

où a et b ($b \neq 0$) désignent des nombres réels.

1. <u>Recherche des matrices $M(a;b)$ telles que $(M(a;b))^2 = M(a;b)$.</u>

   (a) Exprimer $(M(a;b))^2$ comme combinaison linéaire de $M(a;b)$ et de $I_{10}$ , où $I_{10}$ désigne la matrice-identité d'ordre 10.

   (b) Déterminer les couples $(a;b)$ avec $b \neq 0$ tels que $(M(a;b))^2 = M(a;b)$.

2. <u>Calcul des Puissances de $M(a;b)$.</u>
   On considère les matrices $P = M(\dfrac{1}{10};\dfrac{1}{10})$ et $Q = I_{10} - P$.

   (a) Calculer $P^2, Q^2, PQ$ et $QP$. En déduire les puissances $P^k$ et $Q^k$ pour $k \geqslant 1$.

(b) Exprimer $M(a;b)$ comme combinaison linéaire de $P$ et de $Q$ et en déduire $(M(a;b))^n$ comme combinaison linéaire des matrices $P$ et $Q$ . Expliciter enfin la matrice $(M(a;b))^n$.

3. Limite des puissances de $M(1-9b;b)$ pour $0 < b \leqslant \frac{1}{9}$.
On suppose que a et b sont des nombres réels positifs tels que $a + 9b = 1$ (donc $a = 1 - 9b$).
On dit que la suite des matrices $(M(a;b))^n$ converge vers une matrice L lorsque tous les coefficients de $(M(a;b))^n$ convergent vers les coefficients respectifs de L quand n tend vers $+\infty$.

(a) Déterminer la matrice limite L de la suite $(M(a;b))^n$ quand n tend vers $+\infty$.

(b) Exprimer la matrice L comme combinaison linéaire des matrices $P$ et $Q$.

4. Étude des déplacements d'un pion sur un damier.
On considère un damier à 10 cases numérotées 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.
On considère les déplacements d'un pion, situé à l'instant 0 sur la case 0 , et à l'instant n (où n désigne un entier naturel) sur une case dont le numéro est une variable aléatoire $X_n$.
On fait enfin les hypothèses suivantes, concernant les déplacements du pion : si à l'instant n le pion est sur la case k $(0 \leqslant k \leqslant 9)$ , il se trouve encore sur la case k à l'instant n + 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ , et sinon, il se trouve de façon équiprobable sur l'une des autres cases.

(a) Pour tout entier j compris entre 0 et 9 , exprimer la probabilité $P(X_{n+1} = j)$ en fonction des Probabilités $P(X_n = 0), P(X_n = 1), ..., P(X_n = 9)$.
On note $V_n$ le vecteur-colonne dont les composantes sont, de haut en bas, les probabilités $P(X_n = 0), P(X_n = 1), ..., P(X_n = 9)$.
Déterminer une matrice carrée M d'ordre 10 telle que : $V_{n+1} = MV_n$.

(b) Calculer en fonction de n les probabilités $P(X_n = 0), P(X_n = 1), ..., P(X_n = 9)$ , puis leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

## Exercice 2

On désigne par n un nombre entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines de l'équation $e^x = x^n$, que l'on note $(E_n)$. À cet effet, on introduit la fonction f $_n$ définie par :

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$

### A. ÉTUDE DES RACINES POSITIVES DE $(E_\mathbf{n})$.

1. Étude des racines positives des équations $(E_1)$ et $(E_2)$.

(a) Étudier et représenter sur $[0; +\infty[$ les fonctions $f_1$ et $f_2$.

(b) Étudier l'existence de racines positives pour les équations $(E_1)$ et $(E_2)$.

2. Étude des racines positives de l'équation $(E_3)$

(a) Étudier et représenter sur $[0; +\infty[$ la fonction $f_3$.
En déduire que l'équation $(E_3)$ admet deux racines positives u et v telles que $1 < u < v$ , et encadrer chacune d'elles entre deux entiers consécutifs.

(b) Soit la suite définie par la relation $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$ et la condition initiale $y_0$ où $y_0$ est un nombre réel strictement supérieur à u.

- Montrer que, si $u < y_0 \leqslant v$ , alors, pour tout entier naturel n , $u < y_n \leqslant v$.
- Montrer que, si $v \leqslant y_0$ , alors, pour tout entier naturel n , $v \leqslant y_n$.
- Étudier le signe de $y_{n+1} - y_n$ en fonction du signe de $y_n - y_{n-1}$.
En déduire, selon la position de $y_0$ par rapport à v , le sens de variation de la suite $(y_n)$.

- Étudier enfin la convergence et la limite de la suite $(y_n)$.

(c) On choisit désormais $y_0 = 4$.
Écrire en PASCAL un algorithme permettant le calcul de $y_n$ pour un entier n donné.
Établir pour tout entier naturel n que $0 \leqslant v - y_{n+1} \leqslant 0,75(v - y_n)$ puis que $0 \leqslant v - y_n \leqslant 0,75^n$. Comment suffit-il de choisir l'entier n pour que $y_n$ constitue une valeur approchée de v à $10^{-5}$ près? Donner cette valeur de y $_n$ avec toutes les décimales fournies par la calculatrice.

(d) Soit la suite définie par la relation $x_{n+1} = \exp(\dfrac{x_n}{3})$ et la condition initiale $x_0$ , où $x_0$ est un nombre réel positif strictement inférieur à v.

- Montrer que, si $u \leqslant x_0 < v$ , alors, pour tout entier naturel n , $u \leqslant x_n < v$.
- Montrer que, si $x_0 \leqslant u$ , alors, pour tout entier naturel n , $x_n \leqslant u$.
- Étudier le signe de $x_{n+1} - x_n$ en fonction du signe de $x_n - x_{n-1}$.
  En déduire, selon la position de x $_0$ par rapport à u , le sens de variation de la suite $(x_n)$.
  Étudier enfin la convergence et la limite de la suite $(x_n)$.

(e) On choisit désormais $x_0 = 2$.
Établir pour tout entier naturel n que $0 \leqslant x_{n+1} - u \leqslant 0,65(x_n - u)$ , puis que $0 \leqslant x_n - u \leqslant 0,65^n$.
Écrire en PASCAL un algorithme permettant le calcul de $x_n$ pour un entier n donné. Comment suffit-il de choisir l'entier n pour que $x_n$ constitue une valeur approchée de u à $10^{-5}$ près?
Donner cette valeur de $x_n$ avec toutes les décimales fournies par la calculatrice.

3. Étude des racines positives de l'équation $(E_n)$ pour $n \geqslant 3$.

(a) Étudier sur $[0; +\infty[$ la fonction $f_n$. En déduire que l'équation $(E_n)$ admet deux racines positives $u_n$ et $v_n$ telles que $1 < u_n < v_n$.

(b) Déterminer, pour $n \geqslant 4$ , le signe de $f_n(u_{n-1})$.
Déduire des variations de la fonction $f_n$ le sens de variation de la suite $(u_n)$ , puis prouver la convergence de celle-ci.

(c) Montrer que $u_n = \exp(\dfrac{u_n}{n})$, et en déduire la limite L de la suite $(u_n)$, puis un équivalent simple de $u_n - L$ quand n tend vers $+\infty$.

(d) Déterminer, pour $n \geqslant 4$ , le signe de $f_n(v_{n-1})$. Déduire des variations de la fonction $f_n$ le sens de variation de la suite $(v_n)$, puis étudier la limite de celle-ci.

(e) On pose pour tout réel $x > 1$ : $g(x) = x - \ln(x)$. Montrer (à l'aide d'un théorème dont on rappellera l'énoncé) que g réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur $]1; +\infty[$.
Établir que $g(v_n/n) = \ln(n)$, montrer à l'aide de $g^{-1}$ (bijection réciproque de g ) que $v_n/n$ tend vers $+\infty$ , puis en déduire un équivalent de $v_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

## B. ÉTUDE DES RACINES NEGATIVES DE $(E_{\mathbf{n}})$ .

1. Existence de racines négatives de $(E_n)$.

(a) Étudier sur $]-\infty; 0]$ les fonctions $f_{2k}$ et $f_{2k-1}$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

(b) À quelle condition sur l'entier n l'équation $(E_n)$ admet-elle des racines négatives ?

2. Étude des racines négatives de l'équation $(E_{2n})$.

(a) Encadrer entre deux entiers consécutifs la racine négative $w_n$ de l'équation $(E_{2n})$ et déterminer, pour $n > 2$, le signe de $f_{2n}(w_{n-1})$.

(b) En déduire le sens de variation, la convergence et la limite L de la suite $(w_n)$, puis un équivalent simple de $w_n - L$ quand n tend vers $+\infty$.