ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES I

Année 1991

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout le problème, on désigne par a un réel strictement positif et par K une fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$K(x) = P(x)\exp(-\frac{x}{2a})$$

où P est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
L'objet du problème est la recherche des fonctions continues f de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'on ait pour tout réel positif x :

$$f(x) = K(x) + \int_0^{+\infty} K(x+t)f(t)dt. \qquad (1)$$

Les trois parties du problème sont indépendantes les unes des autres.

PRELIMINAIRE

On considère pour tout entier naturel n l'intégrale $J_n(a)$ définie par :

$$J_n(a) = \int_0^{+\infty} t^n \exp(-\frac{t}{a})dt.$$

En raisonnant par récurrence sur n, établir la convergence de cette intégrale et préciser sa valeur en fonction de n et a.

PARTIE I

Dans toute cette partie, on suppose que $P(x) = 1$.

1. Soit f une solution de (1). Montrer qu'il existe un réel c tel que $f = cK$.

2. On considère réciproquement une fonction $f = cK$, où c est un nombre réel donné.
   A quelle condition sur c cette fonction est-elle solution de (1) ?

3. Etudier, selon les valeurs prises par a, l'existence des solutions de (1) et en déduire leur expression.

PARTIE II

Dans toute cette partie, on désigne par λ un nombre réel et l'on suppose que $P(x) = \lambda a + x$.

1. Soit E l'espace vectoriel engendré par les 2 applications de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$:

$$\Phi_0(x) = \exp(-\frac{x}{2a}); \qquad \Phi_1(x) = \frac{x}{a}\exp(-\frac{x}{2a}).$$

   (a) Montrer que (Φ_0, Φ_1) est une base de E.

   (b) Soient Φ un élément de E, et Ψ la fonction définie pour $x \geqslant 0$ par :

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\Phi(t)dt.$$

   Prouver que cette intégrale Ψ(x) est convergente, et montrer que Ψ est un élément de E.

   (c) Montrer que l'application $u\ : \Phi \in E \mapsto u(\Phi) = \Psi \in E$ est un endomorphisme de E.
   Etablir que sa matrice dans la base (Φ_0, Φ_1) est de la forme $a^2 M(\lambda)$ où $M(\lambda)$ est une matrice ne dépendant que de λ que l'on explicitera.
   u est-il un automorphisme de E ?

2. Soit f une solution de (1). Montrer qu'elle appartient à E.

3. On considère réciproquement une fonction $f = \alpha_0\Phi_0 + \alpha_1\Phi_1$ de E où α_0 et α_1 sont des nombres réels.

   (a) Etablir que cette fonction f est solution de (1) si et seulement si α_0 et α_1 sont solutions d'un système de deux équations que l'on explicitera.

   (b) Résoudre et discuter le système obtenu.

   (c) Représenter dans le plan l'ensemble des couples (a^2, λ) pour lesquels l'équation (1) n'a pas de solution (on portera a^2 en abscisse et λ en ordonnée).

PARTIE III

Dans toute cette partie, on suppose que $P(x) = 3a^2 - 4ax + x^2$.

1. On considère la matrice M définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer les valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 de M (avec $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$).

   (b) Déterminer un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres. (On choisira à chaque fois un vecteur propre dont la 3ème composante est égale à 1) .

(c) En déduire une matrice inversible P telle que :

$$M = P.\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.P^{-1}.$$

(d) Calculer l'inverse de la matrice P.

2. On considère les trois suites (u_n), (v_n), (w_n) définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = & u_n + 2v_n + 6w_n \\ v_{n+1} = & -u_n + 2w_n \\ w_{n+1} = & u_n + 2v_n + 2w_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad u_0 = 3; \quad v_0 = -2; \quad w_0 = 1$$

(a) A l'aide du résultat précédent, expliciter u_n, v_n, w_n.

(b) Etudier la convergence et calculer les sommes éventuelles U, V, W des trois séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} a^{3n} u_n \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 0} a^{3n} v_n \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 0} a^{3n} w_n \quad .$$

3. On définit une suite de fonctions de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $g_0 = K$, puis :

$$g_{n+1}(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t) g_n(t) dt$$

et l'on pose alors :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x).$$

(a) Prouver par récurrence que g_n est bien définie et qu'il existe trois nombres réels α_n, β_n, χ_n tels que l'on ait pour tout réel positif x :

$$g_n(x) = a^{3n}(\alpha_n a^2 + 2\beta_n ax + \chi_n x^2)\exp(-\frac{x}{2a}).$$

A l'aide des résultats précédents, on explicitera les expressions de α_n, β_n, χ_n.

(b) Vérifier que, pour tout entier naturel n et tout réel positif x, on a :

$$f_{n+1}(x) = K(x) + \int_0^{+\infty} K(x+t) f_n(t) dt.$$

4. On suppose que $4a^3 < 1$ et l'on définit pour tout réel positif x :

$$L(x) = (Ua^2 + 2Vax + Wx^2)\exp(-\frac{x}{2a}).$$

(a) Montrer que, pour tout réel positif x, la suite $(f_n(x))$ converge et exprimer sa limite en fonction de $L(x)$.

(b) Montrer que la fonction L est solution de (1).

5. Soit f une solution de (1). Montrer qu'elle est nécessairement de la forme :

$$f(x) = (Aa^2 + 2Bax + Cx^2)\exp(-\frac{x}{2a}).$$

6. On considère réciproquement la fonction f définie par :

$$f(x) = (Aa^2 + 2Bax + Cx^2)\exp(-\frac{x}{2a}).$$

   (a) Montrer que f est solution de (1) si et seulement si A, B, C vérifient :

$$(I_3 - a^3 M)\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Pour quelles valeurs de a ce système admet-il une solution unique et quelle est alors cette solution ?

7. Etudier, selon les valeurs prises par a, l'existence des solutions de (1) et en déduire leur expression.