ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option économique

MATHEMATIQUES I

Année 1989

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE I

Le but de l'exercice est d'étudier un algorithme d'approximation de $\ln x$ $(x > 1)$.

A) Inégalités préliminaires

On définit deux fonctions T et S sur $[1, +\infty[$ par :

$$T(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \qquad ; \qquad S(x) = \frac{x^2-1}{2x}$$

1. Démontrer que , pour $x \geqslant 1$:

$$T(x) \leqslant 2T(\sqrt{x}) \qquad ; \qquad 2S(\sqrt{x}) \leqslant S(x)$$

2. Etudier pour $x \geqslant 1$ les variations des fonctions f et g définies par:

$$f(x) = \ln(x) - T(x) \qquad ; \qquad g(x) = S(x) - \ln(x)$$

   En déduire que , pour tout $x > 1$: $T(x) < \ln(x) < S(x)$

B) étude d'un algorithme d'approximation de $\ln(x)$

Dans cette partie, on désigne par x un réel strictement supérieur à 1.

1. On note (u_n) la suite définie par $u_0 = x$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

   (a) Prouver que, pour tout entier naturel n:

$$0 < u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(u_n - 1)$$

   En déduire un encadrement de $u_n - 1$ en fonction de x et n, puis la limite de (u_n).

   (b) Exprimer u_n en fonction de x et n.

2. On définit les deux suites (S_n) et (T_n) par :

$$T_n = 2^n T(u_n) \qquad ; \qquad S_n = 2^n S(u_n)$$

   Déduire de A les variations des suites (T_n) et (S_n) et, pour tout entier naturel n, la double inégalité : $T_n < \ln(x) < S_n$.

3. Prouver la convergence des suites (T_n) et (S_n) et, en étudiant le rapport $\dfrac{S_n}{T_n}$ donner leur limite.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $C_n = \dfrac{S_n}{T_n}$. Montrer que:

$$(1) \qquad C_{n+1} = \sqrt{\frac{1+C_n}{2}} \qquad ; \qquad (2) \qquad S_{n+1} = \frac{S_n}{C_{n+1}} \qquad ; \qquad (3) \qquad T_{n+1} = \frac{S_{n+1}}{C_{n+1}}$$

5. Etant donné un réel $x > 1$ et un entier naturel p, écrire un algorithme (en français ou en PASCAL) utilisant les relations (1), (2), (3) et donnant :

   - la plus petite valeur de l'entier n telle que :

$$S_n - T_n < 10^{-p}$$

   - la valeur approchée par exès de $\ln(x)$ ainsi obtenue.
     Quels résultats numériques obtient-on pour $x = 2,\ x = 3,\ x = 5$ avec $p = 6$?
     (On donnera les résultats avec toutes les décimales fournies par la calculatrice).

C) Vitesse de convergence

1. Dans cette question, f et g désignent les deux fonctions introduites en A.2°.

   (a) Prouver successivement que , pour tout réel $x \geqslant 1$:

$$\text{(i)} \qquad 0 \leqslant g'(x) \leqslant \frac{(x-1)^2}{2} \qquad \text{(ii)} \qquad 0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{(x-1)^3}{6}$$

   (b) En raisonnant de même, déterminer un réel $k > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant 1$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant k(x-1)^3$$

2. Dans cette question, on désigne par x un réel strictement supérieur à 1. (u_n), (S_n) et (T_n) sont les suites précédemment introduites à la partie B.

(a) Etablir que , pour tout entier naturel n :

$$S_n - \ln(x) = 2^n g(u_n) \qquad ; \qquad \ln(x) - T_n = 2^n f(u_n)$$

(b) En déduire deux réels α et β tels que , pour tout entier naturel n:

$$0 \leqslant S_n - \ln(x) \leqslant \alpha \frac{(x-1)^3}{4^n} \qquad ; \qquad 0 \leqslant \ln(x) - T_n \leqslant \beta \frac{(x-1)^3}{4^n}$$

Prouver enfin que:

$$0 \leqslant S_n - T_n \leqslant \frac{1}{2} \frac{(x-1)^3}{4^n}$$

(c) Pour quelle valeur minimale de n a-t-on :

$$\frac{1}{2} \frac{(x-1)^3}{4^n} < 10^{-6}$$

pour $x = 2$? $x = 3$? et pour $x = 5$? Comparer ces valeurs à celles obtenues au B-5..

EXERCICE II

Question prélimminaire :

Calculer les deux intégrales

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1 - \frac{x}{2}}\, dx \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^1 \frac{1}{2\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2}\, dx$$

Dans ce qui suit, on désigne par N un entier supérieur ou égal à 3 et on considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On y effectue une suite de tirages, "au hasard" et "avec remise" (chaque boule tirée étant donc remise dans l'urne avant le tirage suivant) et on s'intéresse au numéros des boules ainsi tirées.

A) Nombre de tirages nécessaire à l'obtention de n numéros distincts.

Pour tout entier naturel n tel que $2 \leqslant n \leqslant N$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale au nombre minimum de tirages nécessaire à l'obtention, pour la 1 ère fois, de n numéros distincts.

1. On pose $X_2 = 1 + Z_2$. Reconnaître la loi de la variable Z_2. Déterminer son espérance et sa variance.

2. On pose, pour $3 \leqslant n \leqslant N$, $Z_n = X_n - X_{n-1}$ et on admet que les variables aléatoires Z_n et X_{n-1} sont indépendantes.
   Interpréter la variable aléatoire Z_n, reconnaître sa loi et déterminer son espérance et sa variance.

3. Calculer, pour $2 \leqslant n \leqslant N$, l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$.

4. On suppose, dans cette question, que N est pair et l'on pose $N = 2p \quad (p \geqslant 2)$.

   Déterminer, à l'aide de la question préliminaire

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{E(X_p)}{p} \qquad \text{et} \qquad \lim_{p \to +\infty} \frac{V(X_p)}{p}$$

B) Nombre des numéros non obtenus à l'issue du n° tirage.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 on désigne par Y_n la variable aléatoire égale au nombre des numéros non encore sortis à l'issue du n° tirage.

1. Que dire de la variable aléatoire Y_1 ?

2. On suppose $n \geqslant 2$.

   (a) Calculer $P([Y_n = k])$, pour $k \geqslant N$.

   (b) Démontrer la formule suivante, pour $0 \leqslant k \leqslant N-1$:

   $$(1) \qquad N.P([Y_n = k]) = (N-k).P([Y_{n-1} = k]) + (k+1).P([Y_{n-1} = k+1])$$

   Vérifier que cette formule est encore valable pour $k = N-1$

3. On pose pour $n \geqslant 1$:

   $$u_n = E(Y_n) \qquad \text{et} \qquad v_n = E({Y_n}^2 - Y_n)$$

   Déduire de la relation (1) que les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques et en déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y_n.

4. On suppose dans cette question que N est pair et l'on pose $N = 2p$ ($p \geqslant 2$).
   Déterminer

   $$\lim_{p \to +\infty} \frac{E(Y_p)}{p} \qquad \text{et} \qquad \lim_{p \to +\infty} \frac{V(Y_p)}{p}$$