ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale et économique

MATHEMATIQUES II

Année 1986

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le but du problème, exposé à la **partie II**, est l'étude de la probabilité d'extinction de la descendance d'un individu d'une population donnée. La **partie I** prépare l'étude numérique de ce problème sous certaines hypothèses. Dans tout ce problème, on note indifféremment $\exp(x)$ ou e^x l'exponentielle du réel x.

Partie I

Le but de cette partie est la résolution de l'équation suivante :

$$exp(t(x-1)) = x \text{ avec } 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{E}$$

dans laquelle t désigne un paramètre réel strictement positif donné. On considère d'une part la fonction f telle que : $f(x) = \exp(t(x-1))$ et d'autre part la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = 0$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Nombre des racines de l'équation (E)

   (a) Déterminer le maximum sur r de la fonction $t \to t\exp(-t)$.

   (b) Étudier sur le segment $[0, 1]$ les variations de la fonction F définie par $F(x) = f(x) - x$ (on donnera les tableaux de variations correspondant aux cas : $t \leqslant 1$ et $t > 1$). En déduire en fonction des valeurs du paramètre strictement positif t le nombre des racines de l'équation (E) dans $[0, 1]$. On désigne par $r(t)$ la plus petite racine positive de (E).

2. Etude de la suite (u_n)
Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par $r(t)$. En déduire sa convergence et sa limite. Que vaut celle-ci pour $t \leqslant 1$?

3. Calcul approché de $r(t)$ pour $t > 1$
On suppose dans cette question que $t > 1$.

   (a) Montrer que s'il existe un entier naturel n tel que $F(u_n + a) < 0$ (où a est un réel strictement positif), alors l'on a :
$$u_n < r(t) < u_n + a.$$
   (b) Ecrire en PASCAL un programme permettant de déterminer le premier entier n pour lequel est satisfaite l'inégalité $F(u_n + 10^{-6}) < 0$ ainsi que la valeur correspondante de u_n (d'après (a) on a alors $u_n < r(t) < u_n + 10^{-6}$, donc u_n constitue une valeur approchée de $r(t)$ à 10^{-6} près).
   (c) Compléter le tableau suivant dans lequel figurent pour chaque valeur de t l'entier n obtenu et la valeur approchée correspondante de u_n (que l'on donnera avec 8 décimales):

valeur de t	valeur de l'entier n	valeur approchée de u_n
3		
2,5		
2		
1,5	27	0,417187(65)
1,25	51	0,628628(81)
1,1	121	0,823864(93)

4. Etude de la fonction $t \to r(t)$
On pose pour $0 < x < 1$: $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{(x-1)}$ et $h(1) = 1$.

   (a) Etudier le sens de variation de h, et montrer que h réalise une bijection continue strictement monotone de $]0, 1]$ vers $[1, +\infty[$. Calculer $h'(1)$ et tracer la courbe représentative de h.
   (b) Calculer $h(r(t))$ pour $t \geqslant 1$. En déduire que la fonction r est continue strictement monotone sur $[1, +\infty[$. Tracer la courbe représentative de r sur $]0, +\infty[$.
   (c) Montrer que : $r(t)\ln(r(t)) = t.r(t)(r(t) - 1)$. En déduire les limites de$t.r(t)$ et de $r(t)\exp(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

5. Etude de la vitesse de convergence de (u_n) pour $t \neq 1$

   (a) En étudiant le signe de $F'(r(t))$, montrer que : $0 < t.r(t) < 1$ pour $t \neq 1$.
   (b) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir pour tout entier naturel n les inégalités suivantes :
$$(i) \quad 0 \leqslant r(t) - u_{n+1} \leqslant t.r(t)(r(t) - u_n) \quad (ii) \quad 0 \leqslant r(t) - u_n \leqslant (t.r(t))^n$$
   Que devient (ii) pour $t < 1$?

6. Etude de la vitesse de convergence de (u_n) pour $t = 1$
Cette question, plus difficile, n'est utilisée par la suite qu'en II.B 3). On suppose dans toute la question que $t = 1$.

   (a) Soit (x_n) une suite réelle et : $\overline{x_n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k$
   Montrer que si la suite (x_n) converge vers 0, alors la suite $(\overline{x_n})$converge aussi vers 0.
   En déduire que si (x_n) converge vers l, alors $(\overline{x_n})$ converge aussi vers l.
   (b) On pose $v_n = 1 - u_n$, $w_n = \dfrac{1}{v_n}$. Exprimer $w_{n+1} - w_n$ en fonction de v_n, et en remarquant que (v_n) tend vers 0 dans ce cas $(t = 1)$, en déduire la limite de la suite $(w_{n+1} - w_n)$.
   (c) Vérifier l'égalité : $\dfrac{w_n - w_0}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(w_{k+1} - w_k)$ puis montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} n(1 - u_n) = 2$

Partie II

Dans une population, on convient d'appeler descendants de $1^{ère}$ génération d'un individu ses enfants, descendants de $2^{ème}$ génération ses petits-enfants, Ses descendants de $(p+1)^{ème}$ génération étant les enfants de ses descendants de $p^{ème}$ génération ($p \in \mathbb{N}^{\times}$). On suppose alors que :

- Il existe une variable aléatoire X_1 suivant une loi de Poisson de paramètre $t > 0$ telle que :
  les variables aléatoires associant aux différents individus d'une même génération les nombres possibles de leur enfants sont indépendantes et de même loi que X_1 ($t = E(X_1)$ représente donc le nombre moyen d'enfants par individu).

- Plus généralement, il existe une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires à valeur dans n telles que l'on ait pour tout entier naturel non nul n :
  les variables aléatoires associant aux différents individus d'une même génération les nombres possibles de leurs descendants de $n^{ème}$ génération sont indépendantes et de même loi que X_n

On considère enfin les notations suivantes :

- $\forall k \in \mathbb{N}, \quad p(k) = P\left([X_1 = k]\right).$
  C'est la probabilité pour un individu d'avoir k enfants.

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = P\left([X_n = 0]\right)$ avec la convention $U_0 = 0$.
  C'est la probabilité pour un individu de n'avoir aucun descendant de la $n^{ème}$ génération. La limite de la suite (U_n), si elle existe, représente la probabilité pour un individu de voir sa descendance s'éteindre.

A/ Probabilité d'extinction de la descendance d'un individu

1. Expliciter $p(k)$ pour $k \in N$ et montrer que l'on a pour tout réel x :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p(k)x^k = f(x)$$

2. Remarquer que $U_1 = f(U_0)$. Calculer la probabilité conditionnelle pour qu'un individu n'ait pas de petits enfants sachant qu'il a exactement k enfants. En déduire à l'aide de la formule des probabilités totales : $U_2 = f(U_1)$.

3. Prouver que l'on a pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = f(U_n)$.
   En déduire que cette suite (U_n) est égale à la suite (u_n) du I, et donner des valeurs approchées de $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$, probabilité d'extinction de la descendance d'un individu, dans les sept cas suivants :
   $t = 3; \quad t = 2,5; \quad t = 2; \quad t = 1,5; \quad t = 1,25; \quad t = 1,1; \quad t \leqslant 1.$

B/ Nombre moyen de générations de la descendance d'un individu

Jusqu'à la fin du problème, on suppose que l'on a $t \leqslant 1$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, ce qui revient à supposer que la descendance d'un individu s'éteint au bout d'un nombre fini de générations avec une probabilité égale à 1.
On note alors D la variable aléatoire à valeur dans n associant à un individu le nombre possible de ses générations de descendants (ainsi D prend la valeur 0 si l'individu n'a pas d'enfants, 1 s'il a des enfants et pas de petits-enfants, etc) et $E(D)$ désigne l'espérance de D si elle existe.
On considère enfin la série dont le $n^{ème}$ terme est $1 - U_n$ ($n \geqslant 1$) et l'on pose :

$$S(n,t) = \sum_{k=1}^{n} (1 - U_k)$$

On note $S(t)$ la somme de cette série lorsque celle-ci converge.

1. Dans cette question, n désigne un entier naturel non nul.

(a) Calculer $P([D > n])$ et $P([D = n])$ en fonction de U_n et U_{n+1}.

(b) Former une relation entre $\sum_{k=0}^{n} kP([D = k])$ et $S(n, t)$.

2. Etude de la série $\sum_n (1 - U_n)$ pour $t < 1$

Dans cette question, on suppose que $t < 1$.
On rappelle l'inégalité (ii) établie en I 5. :$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant 1 - U_n \leqslant t^n$.

(a) Montrer que la série de terme général $1 - U_n$est convergente.

(b) Majorer $S(t) - S(n, t)$ et en déduire comment il suffit de choisir n (en fonction de t) pour que $S(n, t)$ constitue une valeur approchée de $S(t)$ à 10^{-2} près.

(c) Imaginer un algorithme, écrit en PASCAL, permettant le calcul de cette valeur approchée $S(n, t)$ où n est l'entier déterminé ci-dessus. Utiliser cet algorithme pour dresser un tableau dans lequel on fera figurer la valeur de l'entier n et la valeur approchée de $S(n, t)$ (que l'on donnera avec trois décimales) dans les cinq cas suivants :
$t = 0,5; \quad t = 0,6; \quad t = 0,7; \quad t = 0,8; \quad t = 0,9.$

3. Existence et calcul de l'espérance de D.

(a) Prouver l'existence de $E(D)$ lorsque $t < 1$ et l'exprimer en fonction de $S(t)$. Donner une valeur approchée de $E(D)$ lorsque
$t = 0,5; \quad t = 0,6; \quad t = 0,7; \quad t = 0,8; \quad t = 0,9.$

(b) Que peut-on dire de $E(D)$ si $t = 1$?