ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

**Option économique**

# MATHEMATIQUES I

**Année 1986**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

exp désigne la fonction exponentielle et ln la fonction logarithme népérien.
L'exercice I est indépendant des exercices II et III.
Bien que liés, les exercices II et III peuvent être traité indépendamment l'un de l'autre.

## I. Analyse

Soit $f$ la fonction numérique définie sur l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des nombres réels positifs par

$$f(x) = \exp\left[\frac{1}{x}\ln x\right] \quad \text{si} \quad x > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

1. Étude de $f$

   (a) Montrer que $f$ est continue en 0 et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (on donnera l'expression de $f'(x)$ pour $x > 0$ et la valeur de $f'(0)$).

   (b) Dresser le tableau de variation de $f$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé (l'étude de la concavité n'est pas demandée).
   On prendra comme unité graphique 4 centimètres.

2. Calcul approché de $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

   (a) par approximation de $f$ par une fonction polynôme

i. Trouver un polynôme $P_1$ très simple de degré 2 tel que :

$$\forall x \in \{0, \frac{1}{2}, 1\} \quad P_1(x) = f(x)$$

ii. Montrer, en le déterminant, qu'il existe un polynôme $P$ unique de degré 4 tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in \{0,1\} \quad P(x) = f(x) \text{ et } P'(x) = f'(x) \\ P\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

(on aura intérêt à introduire le polynôme $Q = P - P_1$)

iii. Tracer, sur le graphique demandé au 1.b., la courbe représentative de la restriction de la fonction polynôme $P$ à l'intervalle $[0, \frac{3}{2}]$

iv. Calculer $I_1 = \int\limits_0^1 P(x)\,dx$, première valeur approchée de $I$.

(b) <u>par la méthode des rectangles</u>

On note, pour $n \geqslant 2$ : $u_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}$

i. Montrer, en utilisant une subdivision régulière de $[0,1]$, que :

$$u_n \leqslant \int\limits_0^1 f(x)\,dx \leqslant u_n + \frac{1}{n}$$

ii. En déduire une deuxième valeur approchée $I_2$ de $I$ à 0,02 près (on donnera la valeur de $n$ utilisée).

# II. Algèbre

On associe à tout nombre réel $p$ la matrice $A(p) = \begin{pmatrix} 1-p & p(1-p) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A(p)$ admet des valeurs propres réelles si et seulement si $p$ appartient à l'intervalle $[-\frac{1}{3}, 1]$.
<u>On suppose dans tout ce qui suit que $p$ appartient à l'intervalle $I$</u> et on note $q$ et $r$ les valeurs propres distinctes ou non de la matrice $A(p)$.

2. (a) Que valent $p + q + r$ ? $pq + qr + rp$ ?
   (b) En déduire les valeurs propres des matrices $A(q)$ et $A(r)$, et que $q$ et $r$ appartiennent à l'intervalle $I$.
   (c) Donner la dimension et une base du sous-espace propre de $A(p)$ associé à la valeur propre $q$.
   Pour quelles valeurs de $p \in I$ , $A(p)$ est-elle diagonalisable ?

3. On suppose dans cette question seulement que $p = \frac{2}{3}$

   Démontrer que : $\left[A\left(\frac{2}{3}\right)\right]^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & \frac{2}{9}a_n \\ a_n & \frac{2}{9}a_{n-1} \end{pmatrix}$ avec $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

4. Soient $f$ et $g$ les deux applications de $I$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall p \in I \quad f(p) = \sup(q,r) \quad g(p) = \inf(q,r)$$

   (a) Etudier les variations de $f$ et de $g$.
   (b) Tracer les deux courbes représentatives dans une même repère orthonormé
   (on prendra comme unité graphique 6 cm).

   Quelles remarques géométriques peut-on faire sur la figure obtenue ?

# III. Probabilités et suites

On effectue des tirages successifs "au hasard et avec remise" d'une boule dans une urne contenant deux boules blanches et une boule noire.

On note : $B$ l'événement : "tirage d'une boule blanche "
$N$ l'événement : "tirage d'une boule noire "
$E$ l'événement : "tirage de deux boules blanches consécutives ", le tirage d'une boule blanche ne pouvant servir qu'une fois à la réalisation de $E$.

Plus précisément, on dit que $E$ est réalisé au rang $k$ ($k \geqslant 2$), si les $(k-1)^e$ tirages et $k^e$ tirages correspondent à la réalisation de $B$ et que $E$ n'est pas réalisé au $(k-1)^e$ tirage.

Exemple : Dans le cas où les 16 premiers tirages sont les suivants :

| Numéro du tirage | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Evénement réalisé | B | N | B | B | B | B | N | B | B | B | N | B | N | B | B | N |
| | | | | ↑ | | ↑ | | | ↑ | | | | | | ↑ | |

On dit que $E$ est réalisé aux rangs 4, 6, 9, 15 mais non réalisé aux rangs 5 ou 10.

1. Etude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que : $\forall n \geqslant 1$, $u_n$ désigne la probabilité de réalisation de $E$ au rang $n$.

   (a) Démontrer que : $\forall n \geqslant 2 \quad u_n = \dfrac{4}{9} - \dfrac{2}{3}u_{n-1}$

   (on pourra par exemple remarquer que, si l'on tire une boule blanche au rang $(n-1)$ et encore une boule blanche au rang $n$ , $E$ est nécessairement réalisé au rang $(n-1)$ ou au rang $n$).

   (b) En déduire la valeur de $u_n$ pour $n \geqslant 1$.

   La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ?

   (c) On suppose $n \geqslant 1$ . Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de fois où $E$ se réalise en $n$ tirages et, pour tout entier $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, $X_k$ est la variable aléatoire prenant la valeur 1 si $E$ est réalisé au $k^e$ tirage sinon la valeur 0.

   Exprimer $X$ en fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

   En déduire $E(X)$ espérance mathématique de $X$.

2. Etude de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ telle que : $\forall n \geqslant 1$, $v_n$ désigne la probabilité de réalisation de $E$ pour la premiére fois au rang $n$ .

   (a) Calculer $v_1$ et $v_2$.

   (b) On suppose $n \geqslant 3$. En remarquant que le premier tirage correspond soit à une noire, soit à une blanche (en quel cas il en va de même du $2^e$ tirage), déterminer une relation de récurrence entre $v_n$, $v_{n-1}$ et $v_{n-2}$.

   (c) Déterminer une matrice carrée $B$ d'ordre 2 à coefficients réels telle que :

   $$\forall n \geqslant 3 \qquad \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} v_{n-1} \\ v_{n-2} \end{pmatrix}$$

   En déduire que $\quad \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = B^{n-2} \begin{pmatrix} 4/9 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (d) Vérifier que la matrice $B$ n'est autre qua la matrice $A(\dfrac{2}{3})$ de l'exercice II.

   En utilisant, sans le démontrer, le résultat donné dans l'exercice II. 3), calculer $v_n$ pour $n \geqslant 1$.

   (e) Que vaut $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ ?

3. <u>Etude du rang aléatoire $Y$ où $E$ est réalisé pour la première fois</u>

   (a) Calculer l'espérance mathématique de $Y$.

   (b) Calculer la variance de $Y$.