ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES I

Année 1984

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans ce problème a et b sont deux nombres réels ($a < b$). $\mathcal{C}$ est l'ensemble des applications indéfiniment dérivables définies sur $[a, b]$ à valeurs réelles.
Id est l'application identique définie sur $\mathcal{C}$.
δ est l'endomorphisme de dérivation qui à tout élément de $\mathcal{C}$ associe son application dérivée ; donc pour tout $f \in \mathcal{C}$ on a $\delta(f) = f'$. u est l'endomorphisme de primitivation qui à tout élément de $\mathcal{C}$ associe sa primitive qui s'annule en a ; donc pour $f \in \mathcal{C}$ et $x \in [a, b]$ on a

$$u(f)(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

On pose $\delta^0 = u^0 = \text{Id}$, et pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ on définit δ^k et u^k par : $\delta^k = \delta \circ \delta^{k-1}$ et $u^k = u \circ u^{k-1}$. On rappelle qu'un polynôme unitaire est un polynôme non nul dont le monôme de degré maximum a pour coefficient 1. Enfin, pour $f \in \mathcal{C}$ et $g \in \mathcal{C}$, on désigne par $(f \mid g)$ le nombre défini par

$$(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)dt;$$

donc :

$$(f \mid g) = u(f.g)(b).$$

Si $(f \mid g) = 0$ nous dirons que f et g sont orthogonaux ou que f s'orthogonalise à g .

Partie I

1. Montrer que si P est un polynôme il en est de même de $u^k(P)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
   Si P est de degré p, quel est le degré de $u^k(P)$?
   Montrer que $(x-a)^k$ divise $u^k(P)(x)$.

2. Soit pour $p \in \mathbb{N}^\times$, h définie par $h(x) = (b-x)^p$; quelles sont les racines de $\delta^k(h)$ pour $k \in \mathbb{N}$?

3. (a) Préciser $\delta \circ u$.
   (b) Soit $\tau = u \circ \delta - \delta \circ u$. Quel est le rang de τ ? Préciser les éléments de son noyau.
   Soient f_1 et f_2 définis par

$$f_1(x) = \sin(x-a) \quad \text{et} \quad f_2(x) = \cos(x-a).$$

   Donner $\tau(f_1)$, $\tau(f_2)$ et $\tau^2(f_2) = \tau \circ \tau(f_2)$.

4. A tout $(f, g) \in \mathcal{C}^2$ et $p \in \mathbb{N}$ on associe l'application φ définie par :

$$\varphi = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \delta^k(f) u^{k+1}(g)$$

   (a) Montrer que $\delta(\varphi)$ est réduit à une somme de deux termes.
   (b) Exprimer $u(f.g - (-1)^{p+1}\delta^{p+1}(f).u^{p+1}(g))$
      i. quand f est quelconque de $\mathcal{C}$,
      ii. quand f est un polynôme de degré inférieur ou égal à p,
      iii. quand $f = h$.

5. Calculer $\varphi(a)$.

6. Pour $f = h$ montrer que $\varphi(b)$ est réduit à un terme.

7. Supposons que g s'orthogonalise à tout polynôme de degré p inférieur à n ; donc $p < n$.
   (a) Que vaut alors l'image de b par $u^{p+1}(g)$?
   (b) On suppose en outre que g est un polynôme unitaire de degré n.
      i. Préciser alors les racines de $u^n(g)$ avec leur ordre de multiplicité.
      ii. Combien y a-t-il de racines de g appartenant à $]a, b[$?

Partie II

1. Soit $K(x) = (x-a)(x-b) = (x-s)^2 - \ell^2$. Préciser les constantes s et ℓ^2.

2. Soit $M(x) = (x-a)^n(x-b)^n = (K(x))^n$ et $S = \delta^n(M)$ avec $n \in \mathbb{N}^\times$.
   (a) Calculer $(x-a)(x-b)M'(x) - n(2x-a-b)M(x)$
   (b) Calculer $(x-a)(x-b)S''(x) + (2x-a-b)S'(x)$

Partie III

Dans la suite on désigne par v l'application qui à tout $f \in \mathcal{C}$ associe l'application $v(f)$ définie pour tout $x \in [a, b]$ par

$$v(f)(x) = (x-a)(x-b)f''(x) + (2x-a-b)f'(x)$$

Dans toute cette partie n désigne un entier naturel non nul.

1. Montrer que v est un endomorphisme de $\mathcal{C}$.
2. En donner des valeurs propres.
3. Montrer que les polynômes 1 et $x \mapsto 3(x-s)^2 - \ell^2$ en sont deux vecteurs propres ; en donner les valeurs propres.
4. Montrer qu'existe un polynôme unitaire, vecteur propre de v admettant 12 comme valeur propre. Préciser ce polynôme.
5. Soient deux polynômes unitaires de même degré n, vecteurs propres de v. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel qu'ils engendrent ?
6. On suppose maintenant qu'existent

   <**1**> λ non entier ($\lambda \notin \mathbb{Z}$) valeur propre de v de vecteur propre $G \in \mathcal{C}$.

   <**2**> $x_0 \in [a, b]$ tel que $G(x_0) = 2\lambda \neq 0$; on prendra $0 < \lambda$, et on pose $Q(x) = q(x-\alpha)(\beta - x) + 1$ avec $0 < q$ et $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

   (a) Montrer que G s'orthogonalise à tout polynôme .

   (b) Montrer que l'on peut choisir q pour que $0 \leqslant Q(a)$ et $0 \leqslant Q(b)$.

   (c) Montrer que l'on peut choisir $\alpha < \beta$ tels que pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, on ait $\lambda < G(x)$.
   Quelle est alors la valeur minimum prise par $Q(x)$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{3\alpha+\beta}{4}, \dfrac{\alpha+3\beta}{4}\right] \subset [\alpha, \beta]$.

   (d) Quelle est la limite de la suite de terme général $\int_a^b [Q(x)]^n G(x)dx$ lorsque Q vérifie les propriétés énoncées en b) et c) ?

   (e) Montrer que l'hypothèse <1> ci-dessus conduit à une contradiction et conclure.

   (f) Montrer qu'existent $n+1$ polynômes $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ de degrés inférieurs ou égaux à n, vecteurs propres de v de valeurs propres distinctes vérifiant $(A_k \mid A_k) = 1$ pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.
   On pourra choisir A_k de degré k et tel que son terme en x^k ait un coefficient positif.

   (g) Soient $f \in \mathcal{C}$ et $x_0 = a, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n = b$ une suite croissante de $n+1$ nombres distincts.
   Montrer qu'existent et d'une manière unique $n+1$ constantes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ telles que la fonction $\psi = f - \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$ admette parmi ses racines les nombres $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. On pose $B = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$.

   (h) Comparer les polynômes T et U de degrés inférieurs ou égaux à n qui rendent $(T - f \mid T - f)$ et $(U - \psi \mid U - \psi)$ minimum.