ESSEC
M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option économique

MATHEMATIQUES I

Année 1982

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

I. Pour a réel non nul, on considère la fonction réelle définie pour $|x| \neq a$ par :

$$y = \frac{ax}{x - a + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

La représenter graphiquement dans un système cartésien orthonormé.
La convexité et les branches infinies seront précisées.
Les différentes formes de la courbe feront l'objet de tracés dans des repères distincts.

II. Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré 3 au plus.
On se propose de montrer qu'il existe quatre constantes réelles a, b, c et d telles que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on ait :

$$\int_0^1 P(t)dt = aP(-1) + bP(0) + cP(1) + dP(2)$$

(1) Calculer explicitement a en choisissant pour P un polynôme aux racines évidentes.

(2) Traiter le problème proposé.

III. Calculer l' intégrale

$$\int_{-\sqrt{3}}^{+\infty} \left(\arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right) \cdot \frac{dx}{1+x^2}$$

IV. On pose $u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$

Calculer la limite de u_n lorsque n augmente indéfiniment.

- FIN -