ESG 1994 Option économique

Problème 1

Soit n un entier naturel $n > 1$.
On désigne par E_n l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
On désigne par F_n le sous-ensemble de E_n des matrices M telles que $M^2 = O_n$ et $M \neq O_n$
O_n désigne la matrice nulle de E_n.
Les parties I et II du problème sont indépendantes.

Partie I : On suppose $n = 2$

1. Déterminer les matrices M appartenant à F_2.
   On posera $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et on déterminera les conditions sur les quatre nombres a, b, c, d pour que M appartienne à F_2.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices B éléments de F_2 tels que $(A + B)$ soit un élément de F_2.

Partie II : On suppose $n = 3$

Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit A une matrice de F_3.

1. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel E'_3 de E_3 engendré par les matrices A et I.
2. Soit $B = A + I$
   (a) Montrer que B est inversible et que son inverse B^{-1} est un élément de E'_3.
   (b) Pour tout entier k $(k > 0)$ montrer que B^k est un élément de E'_3.
   (c) Exprimer $\sum\limits_{k=1}^{p} B^k$ en fonction de p, A et I.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que A est un élément de F_3.
   (b) Soit $B = A + I$, calculer B^{-1}.

Problème 2

Les parties A et B sont indépendantes
On considère deux urnes U et V. L'urne U contient a boules blanches et b boules noires. L'urne V contient a boules noires et b boules blanches.
Dans ce problème, toutes les boules sont tirées une à une au hasard et avec remise de la boule tirée dans l'urne dont elle provient.

Le premier tirage s'effectue dans U
On désigne pour tout entier n naturel non nul :
U_n l'évènement " le $n^{ième}$ tirage s'effectue dans U "
V_n l'évènement " le $n^{ième}$ tirage s'effectue dans V "
B_n l'évènement " la $n^{ième}$ boule tirée est blanche "
Remarque : l'évènement U_1 est certain.

Partie A

Dans cette partie, on adopte la règle suivante :
Pour tout entier n ($n \geqslant 1$) si la boule obtenue au $n^{ième}$ tirage est blanche, le $(n+1)^{ième}$ tirage s'effectue dans U sinon le $(n+1)^{ième}$ tirage s'effectue dans V.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois une boule blanche.
   Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance et la variance de X.

2. On désigne par P_n la probabilité de l'évènement B_n.

   (a) Déterminer une relation entre P_n et P_{n+1}.

   (b) En déduire l'expression de P_n en fonction de n, a et b.

   (c) Déterminer la limite de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$.

Partie B

Dans cette partie, on adopte la règle suivante :
Pour tout entier n ($n \geqslant 1$), si la boule obtenue au $n^{ième}$ tirage est blanche, le $(n+1)^{ième}$ tirage s'effectue dans la même urne, c'est-à-dire : le $(n+1)^{ième}$ tirage s'effectue dans l'urne où a été tiré la $n^{ième}$ boule.
Sinon on change d'urne, c'est-à-dire : le $(n+1)^{ième}$ tirage s'effectue dans l'urne où ne s'est pas effectué le $n^{ième}$ tirage.

1. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois une boule blanche.
   Déterminer la loi de probabilité de Y.

2. Pour tout entier n ($n \geqslant 2$) calculer la probabilité de l'évènement U_n.

3. Calculer la probabilité de l'évènement B_n pour $n \geqslant 2$.