

Exercice I

Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que : $f : x \mapsto f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

1. Etudier et représenter graphiquement cette fonction. En déduire que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad 1 + x < e^x$$

2. Soit q un nombre réel strictement positif et soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad U_n = \sum_{i=1}^n \ln(1 + q^i)$$

(\ln désigne le logarithme népérien).

- (a) En utilisant l'inégalité du 1), montrer que si $0 < q < 1$, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ est majorée.
 - (b) Discuter suivant les valeurs de q la convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$
3. Soit la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad V_n = \frac{x}{e^x - 1} - \sum_{k=1}^n x e^{-kx}$$

où x est un nombre strictement positif.

Déterminer la limite de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$

Exercice II

Soit l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 . Soit $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

1. On considère l'application t de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto t(x, y) = (x, 2x + 2y)$$

Soit T la matrice de t dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .

- (a) Déterminer les nombres réels λ_1 et λ_2 vérifiant la propriété suivante

$$\begin{aligned} &\text{Il existe } \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \vec{v} \neq (0, 0) \text{ tel que } t(\vec{v}) = \lambda_1 \vec{v} \\ &\text{Il existe } \vec{w} \in \mathbb{R}^2, \vec{w} \neq (0, 0) \text{ tel que } t(\vec{w}) = \lambda_1 \vec{w} \end{aligned}$$

- (b) Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2, \vec{v} \neq (0, 0)$ tel que $t(\vec{v}) = \lambda_1 \vec{v}$
Soit $\vec{w} \in \mathbb{R}^2, \vec{w} \neq (0, 0)$ tel que $t(\vec{w}) = \lambda_1 \vec{w}$
Montrer que (\vec{v}, \vec{w}) est une base de \mathbb{R}^2 et déterminer la matrice T' de t dans cette base.

- (c) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, calculer $P^{-1}TP$.
En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad T^n$.

2. Soit f l'application de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \quad M \mapsto f(M) = TM - MT$$

(a) Montrer que f est linéaire.

(b) Soit \mathcal{A} l'ensemble des matrices $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $f(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base de \mathcal{A} .

Exercice III

Un commerçant réceptionne un lot de N articles. Sur ces N articles, n d'entre eux sont défectueux.

On suppose $N - n \geq 1$ et $n \geq 1$.

Le commerçant contrôle les articles du lot en les tirant au hasard un à un et sans remise.

Soit X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier article défectueux contrôlé.

Soit Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition du deuxième article défectueux contrôlé.

1. On suppose $n = 1$

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique et la variance de X .

2. On suppose $n = 2$ et $N = 6$.

(a) Déterminer la loi de probabilité de X .

(b) Déterminer la loi de probabilité de Y .

(c) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) . On présentera cette loi par un tableau à double entrée.

(d) Calculer la covariance du couple (X, Y) .

3. Pour N et n quelconques

(a) Déterminer la loi de probabilité de X .

(b) Déterminer la loi de probabilité de Y .

4. Pour N quelconque et $n = 2$, déterminer la loi de probabilité du couple (X, Y) .

5. On suppose $N = 9$ et $n = 2$.

Le commerçant refuse le lot dans les deux cas suivants : $(X \leq 4)$ ou $(X > 4$ et $Y \leq 7)$.

Calculer la probabilité pour que le commerçant refuse le lot.