

EXERCICE N° I

1. Dire pourquoi les limites $\int_{-A}^B x^k e^{-x^2} dx$ existent pour $k > 0$ fixé, quand A et B tendent vers $+\infty$.

On notera $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-x^2} dx$ cette limite.

2. Montrer que la dérivée $\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2})$ est de la forme $(-1)^n H_n(t)e^{-t^2}$ où H_n est un polynôme de degré n , montrer que $H_0 = 1$ et $H_1(t) = 2t$ et

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - H'_n(t) \quad (1)$$

Montrer que H_n est pair ou impair suivant n .

3. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)e^{-t^2} t^k dt = 0$ dès que $k < n$ et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)e^{-t^2} t^n dt$ à l'aide $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

(On pourra intégrer par parties). En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t)e^{-t^2} H_q(t) dt = 0$ dès que $p \neq q$.

4. Montrer que $\{H_0, H_1, \dots, H_n\}$ forment, pour tout n , une base de l'espace des polynômes (à coefficients réels) définis sur \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à n (utiliser $\deg(H_i) = i$)

5. Rappeler pourquoi si f est continue, supérieur ou égal à 0 et $\int_a^b f(t) dt = 0$ alors $f = 0$ sur $[a, b]$.

6. Montrer que si P est un polynôme de degré $(n+1)$ tel que l'on ait $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2} t^k dt = 0$ pour tout $k \leq n$ alors $P = \lambda H_{n+1}$

(On pourra calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} (P - \lambda H_{n+1})^2(t) dt$ pour un λ bien choisi).

7. Montrer que, si λ_n est choisi de sorte que $H_n - \lambda_n t H_{n-1}$ soit de degré $(n-1)$ alors il existe μ_n et γ_n tel que l'on ait :

$$(H_n - \lambda_n t H_{n-1}) - \mu_n H_{n-1} = \gamma_n H_{n-2} \quad (2)$$

EXERCICE N° II (Matrices dites magiques)

Soit $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients $a_{i,j}$ réels. Si quels que soient i et j , $a_{i,j} = -a_{j,i}$ la matrice est dite antisymétrique et si les sommes

$$a_{i,1} + a_{i,2} + a_{i,3}, \quad a_{1,j} + a_{2,j} + a_{3,j}, \quad a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}, \quad a_{3,1} + a_{2,2} + a_{1,3}$$

sont égales, la matrice est dite magique.

- Montrer qu'une matrice M quelconque est la somme d'une matrice symétrique M' et d'une matrice antisymétrique M'' et que cette décomposition est unique.
- Montrer que la somme de deux matrices magiques, que la transposée d'une matrice magique, que le produit d'une matrice magique par un scalaire sont des matrices magiques.

Montrer que si M est magique, M' et M'' le sont aussi.
Vérifier que les matrices A, B, C telles que :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sont des matrices magiques.

3. Construire toutes les matrices magiques antisymétriques.
4. Construire toutes les matrices magiques en commençant par étudier le cas où $a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = 0$
5. Construire toutes les matrices magiques. Montrer qu'elles forment un espace vectoriel sur \mathbb{R} dont on déterminera la dimension. Trouver une base.
6. Calculer $A^2, B^2, C^2, AC, BC, CA, CB$. Montrer que $AB + BA$ est une combinaison linéaire de C et I .
7. Quelle condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices magiques soit magique ? En déduire toutes les magiques produit de deux matrices magiques.
8. Montrer que le produit d'une matrice magique par une combinaison linéaire de C et I est magique.

EXERCICE N° III (Probabilités)

Un marathon jeu d'hivers consiste à exécuter les épreuves suivantes :

1. Traversée d'un glacier de largeur 1 km.
2. Faire un slalom de 20 portes.
3. Emprunter à nouveau la même perche du télésiège ayant monté le candidat au départ de l'épreuve.
- I. Un candidat débute les épreuves par la traversée du glacier. A l'endroit où il devra traverser, on sait qu'il y a une probabilité p qu'il existe une crevasse. On suppose que si cette crevasse existe, sa position est uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 1]$, (la crevasse fait toute la largeur du glacier), du trajet. Le skieur a déjà parcouru la distance x , $0 \leq x \leq 1$, sans encombre et il se demande alors qu'elle est la probabilité qu'il rencontre cette crevasse.
 - (a) Faire le calcul littéral.
 - (b) Application numérique : $p = 0,036$ et $x = 140$ m
- II. Notre skieur arrive à l'épreuve de slalom à 20 portes, et s'il ne tombe pas, son temps de parcours suit une loi normale de moyenne 50 secondes et d'écart-type 2 secondes. A chaque porte, il peut tomber avec une probabilité de $\frac{1}{20}$, ce qui lui fait perdre 4 secondes sur son temps de parcours. On admet que les chutes éventuelles sont indépendantes les unes des autres.
Quelle est la probabilité de décrocher la flèche de platine ? (Temps inférieur à 52 secondes)
- III. Lors de sa première utilisation du télésiège, le skieur a emprunté l'une des N perches de cet appareil. Entre cet instant et l'utilisation suivante, le nombre de skieurs qui se présentent est une variable aléatoire X qui suit une loi géométrique de paramètre p .
 - 1) Quelle est la probabilité que le skieur reprenne la même perche ?
 - 2) Calcul numérique avec $N = 500$ et $p = \frac{1}{36}$

Insérer table de loi binomiale ($p = 0,05$ à $0,50$ avec un pas de $0,05$)

table de loi normale (répartition et grandes valeurs)

loi de poisson (λ de $0,1$ à 4 avec un pas de $0,1$ et $k \in \llbracket 0, 12 \rrbracket$ puis $\lambda \in \llbracket 5, 10 \rrbracket$ et k jusqu'à 24)