ESG 1986 Option technologique

Problème I

$\mathbb{N}^\times$ désigne l'ensemble des entiers naturels privés de 0.
$\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. Toutes les matrices considérées dans ce problème appartiennent à $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Soient $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a' \\ 0 & 1 & b' \end{pmatrix}$, $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad$ et $\quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Partie A :

I. (1) Calculer : $-D^3 + b'D^2 + a'D$.

(2) Déterminer tous les couples $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall p \in \mathbb{N}^\times, \quad D^{2p+1} = 0$

II. Soit A une matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A \neq 0$ et $A^3 = 0$.
On considère le sous-ensemble E de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices de la forme $\alpha A + \beta A^2 + \gamma I$ avec (α, β, γ) appartenant à $\mathbb{R}^3$.

(1) Montrer que si M appartient à E et que M' appartient à E alors $M \times M'$ appartient à E et que $M \times M' = M' \times M$

(2) (α, β, γ) appartenant à $\mathbb{R}^3$, démontrer que : $\alpha A + \beta A^2 + \gamma I = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.

(3) Soit $C = I - A^2$, calculer $C \times (I + A^2)$.
En déduire que C est inversible et que son inverse appartient à E.

(4) a. Soit $B = I - A$. Montrer que B est inversible et que son inverse appartient à E.

b. $p \in \mathbb{N}^\times$. Montrer que $(B^{-1})^p$ est de la forme

$$\alpha_p A + \beta_p A^2 + \gamma_p I$$

avec $(\alpha_p, \beta_p, \gamma_p) \in \mathbb{R}^3$. On déterminera α_p et β_p en fonction de p.

c. Montrer que $\sum\limits_{p=1}^{n} (B^{-1})^p$ est de la forme $\alpha_n A + \beta_n A^2 + \gamma_n I$ avec $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ et on déterminera $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ en fonction de n.

d. Déterminer l'ensemble des matrices A' appartenant à $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $B \times A' = A \times B$.

(5) Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & a \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & b & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ telle que $M^3 = 0$

a. Déterminer les nombres a et b.

b. D étant la matrice vérifiant $\forall p \in \mathbb{N}^\times, \quad D^{2p+1} = 0$, (α, β, γ) appartient à $\mathbb{R}^3$, démontrer que :

$$\alpha M + \beta D + \gamma I = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Partie B :

1. Déterminer les couples (a', b') appartenant à $\mathbb{R}^2$ tels que $\forall p \in \mathbb{N}^{\times}, \quad D^{2p+1} = D$.

2. D vérifiant la relation $\forall p \in \mathbb{N}^{\times}, \quad D^{2p+1} = D$.
   On considère l'ensemble F des matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\alpha D + \beta D^2 + \gamma I$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

   (a) (α, β, γ) appartenant à $\mathbb{R}^3$, montrer que :

   $$\alpha D + \beta D^2 + \gamma I = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

   (b) $p \in \mathbb{N}^{\times}$. Montrer que $(D + I)^p$ est de la forme :

   $$\alpha_n D + \beta_n D^2 + \gamma_n I$$

   avec $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$, on exprimera $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ en fonction de n.

Problème II

Dans ce problème a, b et n sont trois entiers naturels tels que $0 < b < n < a$.
On considère une urne contenant a boules blanches et b boules noires. Les boules blanches sont numérotées de 1 à a et les boules noires de $a + 1$ à $a + b$.
On tire de cette urne n boules simultanément et on suppose l'équiprobabilité des tirages.
On désigne par $i \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant i \leqslant a$, X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la boule est numérotée i est dans le tirage des n boules et qui prend la valeur 0 sinon.

1. Quelle est la loi de la variable X_i et calculer son espérance.

2. (a) Déterminer la loi du couple (X_i, X_j) que l'on présentera sous la forme de tableau.
   (b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).
   (c) Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

3. Déterminer la loi de probabilité de la variable $X_1 + X_2$ et calculer la variance de $X_1 + X_2$.

4. Déterminer la loi suivie par la variable $X_1 \times X_2$.

5. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

   (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   (b) Quelle relation a-t-on entre X et $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
   (c) Déterminer l'espérance de X en utilisant la relation précédente.
   (d) On suppose $n = 90$, $b = 50$ et $a = 950$.
   Par quelle est la loi de probabilité peut-on approximer la loi suivie par X ?

6. On procède maintenant de la manière suivante :
   Si $X = k$, on remet alors les n boules tirées dans l'urne ainsi que k autres boules blanches et l'on tire à nouveau de cette urne simultanément n boules.
   On désigne par Y le nombre de boules blanches à nouveau tirées.
   Quelle est la loi du couple (X, Y) ?