CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 2003

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

Soit a, b deux entiers naturels non nuls et s leur somme.
Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher.
On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne ;
- si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours s boules.
On désigne par $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel n non nul, on note :

- B_n l'événement " la n-ième boule tirée est blanche ";
- X_n la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages;
- u_n l'espérance de la variable aléatoire X_n, c'est-à-dire $u_n = \mathbf{E}(X_n)$.

1. **Étude d'un ensemble de suites**
   Soit A l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de réels qui vérifient :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad s\,x_{n+1} = (s-1)\,x_n + b + n$$
   (a) Soit α et β deux réels et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad v_n = \alpha\, n + \beta$.
   Déterminer en fonction de b et de s les valeurs de α et β pour que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ appartienne à A.

(b) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite appartenant à A, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite déterminée à la question précédente et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad y_n = x_n - v_n$.
Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel n non nul, y_n puis x_n en fonction de x_1, b, s et n.

2. **Expression de la probabilité $\mathbf{P}(B_{n+1})$ à l'aide de u_n**

(a) Donner, en fonction de b et de s, les valeurs respectives de la probabilité $\mathbf{P}(B_1)$ et du nombre u_1.

(b) Calculer la probabilité $\mathbf{P}(B_2)$ et vérifier l'égalité : $\mathbf{P}(B_2) = \dfrac{b+1-u_1}{s}$.

(c) Soit n un entier naturel vérifiant $1 \leqslant n \leqslant a$. Montrer que, pour tout entier k de l'intervalle $[\![0, n]\!]$, la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(B_{n+1}/[X_n = k])$ est égale à $\dfrac{b+n-k}{s}$.
En déduire l'égalité : $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$.

(d) Soit n un entier naturel vérifiant $n > a$.
Si k est un entier de l'intervalle $[\![0, n-a-1]\!]$, quel est l'événement $[X_n = k]$?
Si k est un entier de l'intervalle $[\![n-a, n]\!]$, justifier l'égalité : $\mathbf{P}(B_{n+1}/[X_n = k]) = \dfrac{b+n-k}{s}$. Montrer enfin que l'égalité $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$ est encore vérifiée.

3. **Calcul des nombres u_n et $\mathbf{P}(B_n)$**

(a) Soit n un entier naturel non nul. Établir, pour tout entier k de l'intervalle $[\![n+1-a, n]\!]$, l'égalité :

$$\mathbf{P}([X_{n+1} = k]) = \frac{a-n+k}{s}\mathbf{P}([X_n = k]) + \frac{b+n-k+1}{s}\mathbf{P}([X_n = k-1])$$

Vérifier cette égalité pour $k = n+1$, $k = n-a$ et pour tout entier k de l'intervalle $[\![1, n-a-1]\!]$.

(b) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n et de n. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ appartient à l'ensemble A étudié dans la question 1

(c) Donner, pour tout entier naturel n non nul, les valeurs de u_n et de $\mathbf{P}(B_{n+1})$ en fonction de b, s et n.

(d) Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathbf{P}(B_n))_{n\geqslant 1}$?

PROBLÈME

Dans tout le problème, on désigne par $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$. dans $\mathbb{R}$. .
À toute application f de $\mathcal{C}$, on associe l'application $D(f)$ de $\mathbb{R}$. dans $\mathbb{R}$. définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}., \quad D(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

*Les parties **A**, **B** et **C** sont indépendantes.*

Question préliminaire : D est-il un endomorphisme de $\mathcal{C}$?

Partie A : Image par D d'une fonction de répartition

1. Soit F une application de $\mathcal{C}$. Rappeler les propriétés que doit posséder F pour être considérée comme une fonction de répartition.

2. Soit F une application de $\mathcal{C}$ qui est une fonction de répartition et g l'application $D(F)$.

(a) Montrer que g est positive.

(b) Prouver, pour tout réel x, la double inégalité : $\quad F(x) \leqslant \int_x^{x+1} F(t)\,dt \leqslant F(x+1)$.

En déduire que les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^{x+1} F(t)\,dt$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} F(t)\,dt$ existent et préciser leurs valeurs.

(c) Soit A et B deux réels vérifiant $A < 0 < B$ et $I(A,B)$ l'intégrale : $I(A,B) = \int_A^B g(t)\,dt$.

Justifier l'égalité : $\quad I(A,B) = \int_B^{B+1} F(t)\,dt - \int_A^{A+1} F(t)\,dt$.

(d) Prouver alors soigneusement que g est une densité de probabilité.

3. **Un exemple**
On suppose, dans cette question, que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ et on pose : $g = D(F)$.
Déterminer $g(x)$ pour tout réel x, en distinguant les cas $x < -1$, $-1 \leqslant x < 0$, $0 \leqslant x < 1$ et $1 \leqslant x$.
Représenter graphiquement l'application g.

Partie B : Recherche des valeurs propres de D

Si λ est un réel, on dit que λ est une *valeur propre* de D s'il existe une application f de $\mathcal{C}$, distincte de l'application nulle, vérifiant : $D(f) = \lambda f$.

1. Soit a un réel. On note g_a l'application de $\mathcal{C}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}.\ , g_a(x) = e^{ax}$.
Déterminer l'application $D(g_a)$.

2. En déduire que tout réel λ strictement supérieur à -1 est une valeur propre de D.

3. Soit a un réel. On note h_a l'application de $\mathcal{C}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}.\ , h_a(x) = \sin(\pi x)\,e^{ax}$.
Déterminer l'application $D(h_a)$.

4. En déduire que tout réel λ strictement inférieur à -1 est une valeur propre de D.

5. Le réel -1 est-il une valeur propre de D?

Partie C : Image par D d'une application polynomiale

Pour tout entier naturel p, on désigne par E_p le sous-espace de $\mathcal{C}$ dont les éléments sont les applications polynomiales de degré au plus p.
On note X l'application $x \mapsto x$ et, pour tout entier naturel non nul k, on note X^k l'application $x \mapsto x^k$.
Soit $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite d'applications polynomiales définie par :

$$H_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in \mathbb{N}^{\times}, \quad H_i = \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k)$$

1. Préciser $H_1,\ H_2,\ H_3$ et montrer que $\mathcal{U}_3 = (H_0,\ H_1,\ H_2,\ H_3)$ est une base de E_3.

2. Soit $\mathcal{B}_3 = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E_3.

   (a) Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_3$ à la base $\mathcal{U}_3$ et calculer la matrice P^{-1}.

   (b) Soit $a_0,\ a_1,\ a_2,\ :\ a_3$ des réels et Q l'application polynomiale $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$.
   Quelles sont les coordonnées de Q dans la base $\mathcal{U}_3$?
   En particulier, vérifier l'égalité : $X^3 = H_1 + 6\,H_2 + 6\,H_3$.

3. **Application : moment d'ordre 3 d'une variable aléatoire de Poisson**
Soit a un réel strictement positif et Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a.

(a) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k^3\, a^k}{k!}$.
Transformer S_n à l'aide de la relation : $\forall k \in \mathbb{N}\ , \quad k^3 = H_1(k) + 6\, H_2(k) + 6\, H_3(k)$.
En déduire que la série de terme général $\dfrac{n^3\, a^n}{n!}$ est convergente et préciser $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^3\, a^n}{n!}$.

(b) En déduire que la variable aléatoire Z admet un moment d'ordre 3 donné par :

$$\mathbf{E}(Z^3) = a + 3a^2 + a^3$$

4. Dans cette question, p est un entier naturel non nul fixé.

(a) Montrer que, si Q appartient à E_p, $D(Q)$ appartient aussi à E_p.
On note alors D_p l'endomorphisme de E_p qui, à tout Q de E_p, associe $D(Q)$.

(b) Montrer que la famille $\mathcal{U}_p = (H_0, H_1, \ldots, H_p)$ est une base de E_p.

(c) Déterminer $D_p(H_0)$, $D_p(H_1)$ et prouver, pour tout entier i vérifiant $0 < i \leqslant p$, l'égalité :

$$D_p(H_i) = H_{i-1}.$$

(d) Écrire la matrice M_p représentative de D_p dans la base $\mathcal{U}_p$.

(e) Préciser la ou les valeurs propres de M_p. Cette matrice est-elle diagonalisable?

5. **Application : moment d'ordre p d'une variable aléatoire de Poisson**
Soit p un entier naturel non nul fixé et $b_0, b_1, \ldots, b_p$ les réels vérifiant

$$X^p = b_0 H_0 + b_1 H_1 + \cdots + b_p H_p$$

Par une méthode analogue à celle de la question 3, montrer que la variable aléatoire Z définie dans la question 3 admet un moment d'ordre p donné par $\mathbf{E}(Z^p) = \sum\limits_{i=0}^{p} \dfrac{b_i\, a^i}{i!}$.

6. Dans cette question, p est un entier naturel non nul et, pour tout entier i vérifiant $0 \leqslant i \leqslant p$, on considère l'application φ_i de E_p dans $\mathbb{R}$. qui, à tout élément Q de E_p, associe le réel :

$$\varphi_i(Q) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k}\, C_i^k\, Q(k)$$

où C_i^k désigne le coefficient binomial d'indices i et k.

(a) Montrer que, pour tout entier i vérifiant $0 \leqslant i \leqslant p$, l'application φ_i est linéaire.

(b) Soit i et j deux entiers vérifiant $0 \leqslant i \leqslant p$ et $0 \leqslant j \leqslant p$; établir les égalités :

$$\varphi_i(H_i) = 1 \qquad \text{et si} \quad j \neq i, \quad \varphi_i(H_j) = 0$$

(c) En déduire, pour tout entier i vérifiant $0 \leqslant i \leqslant p$, la relation : $b_i = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^{i-k}\, C_i^k\, k^p$.