CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 2001

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

1. On considére la matrice A définie par: $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et on note ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique.

   (a) i. Montrer que A admet les valeurs propres 1 et 2 et n'en admet pas d'autre.
   Déterminer les sous-espaces propres E_1 et E_2 associés à ces valeurs propres

   ii. La matrice A est-elle diagonalisable?

   (b) Soit V un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1. Trouver un vecteur W de $\mathbb{R}^3$ tel que $\phi(W) = v + W$.

   (c) Soit U un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (d) Déterminer la matrice B représentant l'endomorphisme ϕ dans la base (U, V, W) ainsi qu'une matrice inversible P telle qu'on ait l'égalité $B = P^{-1}AP$.

2. Étant données les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on associe à tout élément (a, b, c) de R^3 la matrice $C_{(a,b,c)}$ définie par:

$$C_{(a,b,c)} = aI + bH + cN$$

On note M l'ensemble des matrices $C_{(a,b,c)}$ où (a, b, c) décrit $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que M est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 et déterminer sa dimension.

(b) Vérifier que la matrice B définie en A.4 appartient à M.

(c) Préciser les conditions que doivent vérifier (a, b, c) pour que $C_{(a,b,c)}$ soit inversible. Déterminer, quand elle existe, sa matrice inverse.

(d) Déterminer les valeurs propres de $C_{(a,b,c)}$.
Montrer que cette matrice est diagonalisable si et seulement si c est nul.

Exercice 2

1. On considére la fonction G de deux variables réelles définie, pour tout x et y strictement positifs, par:

$$G(x, y) = \frac{x^2}{2y^2} - \ln x + y - \frac{3}{2}$$

(a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction G.

(b) Rechercher les extrema éventuels de la fonction G dans le domaine $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

2. On considére maintenant la fonction f définie, pour tout x strictement positif, par:

$$f(x) = G(x, 1) = \frac{x^2}{2} - \ln x - \frac{1}{2}$$

(a) Étudier les variations de f. Montrer que c'est une fonction convexe. Donner sa représentation graphique.

(b) i. Calculer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

ii. En déduire que l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.

(c) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\frac{j}{n})$.

i. Établir, pour tout entier j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant n$, les inégalités:

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{j+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}f\left(\frac{j}{n}\right)$$

ii. En déduire l'encadrement:

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

iii. Montrer les inégalités:

$$0 \leqslant \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

(d) On considére la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ définie précédemment. Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

(e) On rappelle que, pour tout entier naturel non nul, on a l'égalité $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

i. Exprimer, pour tout entier naturel non nul, la somme $\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$ en fonction de n.

ii. En déduire la limite: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$.

Exercice 3

1. **Préliminaire**

   Montrer, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
   Une urne contioent N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, successivement et sans remise, les N boules de cette urne.
   Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note $X1$ la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la premiére fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxiéme fois, une boule noire.

   (a) Préciser l'espace probabilisé (Ω, A, P) que l'on peut utiliser pour modéliser cette expérience aléaoire.

   (b) Soit i et j deux entiers de l'intervale $[1, N]$. Montrer que l'on a:

   $$P(X_1 = i,\ X_2 = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si } \ 1 \leqslant i < j \leqslant N \end{cases}$$

   (c) Déterminer les lois de probabilité des variables X_1 et X_2. Ces variables sont-elles indépendantes?

   (d) i. Démontrer que la variable $N+1-X_2$ a même loi que X_1.
   ii. Déterminer la loi de la variable $X_2 - X_1$ et la comparer à celle de X_1.

   (e) À l'aide des résultats de la question 4:
   i. Calculer les espérances $E(X_1)$ et $E(X_2)$.
   ii. Montrer l'égalité des variances $V(X_1)$ et $V(X_2)$.
   iii. Établir la relation: $2cov(X_1, X_2) = V(X_1)$ où $cov(X_1, X_2)$ désigne la covariance des variables X_1 et X_2.

   (f) Calculer $V(X_1)$; en déduire $V(X_2)$ et $cov(X_1, X_2)$.

3. Dans cette partie, N désigne encore un entier supérieur ou égal à deux.

   (a) On considére le programme Turbo-Pascal suivant, où RANDOM(10) désigne un nombre entier tiré au hasard par l'ordinateur dans l'intervalle $[0, 9]$ (la procédure RANDOMIZE sert à initialiser la fonction RANDOM):

```
PROGRAM Tirage;
VAR a,b,c:INTEGER;
BEGIN
RANDOMIZE;
a:= RANDOM(10)+1;
b:= RANDOM(10)+1;
IF a>b THEN
        BEGIN
          c:=a; a:=b; b:=c;
         END;
IF a<b WRITELN('(',a,',',b,')');
END.
```

   i. Que fait l'ordinateur dans le cas où les variables a et b contiennent toutes les deux le même nombre?
   ii. Qu'affiche l'ordinateur dans le cas où les variables a et b contiennent respectivement les nombres 3 et 5?

iii. Qu'affiche l'ordinateur dans le cas où les variables a et b contiennent respectivement les nombres 10 et 1?

(b) On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé (Ω, A, P), indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N)$ et on désigne par D l'événement: "A ne prend pas la même valeur que B".

i. Montrer que la probabilité de l'événement D est $\dfrac{N-1}{N}$.

ii. Soit Y_1 et Y_2 les variables aléatoires définies par : $\begin{cases} Y_1 = \min(A, B) \\ Y_2 = \max(A, B) \end{cases}$

Calculer, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, 2, \ldots, N\}$, la probabilité conditionnelle $P([Y_1 = i, Y_2 = j]/D)$.

(c) Expliquer pourquoi le programme de la question 1 permet de simuler les variables aléatoires X_1 et X_2 de la partie B, dans le cas où N est égal à 10.