CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1999

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE I

Soit $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 muni de sa structure d'espace vectoriel et soit J la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère l'application S de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même qui associe à tout élément M de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ l'élément $S(M) = J\,M\,J$.

1. (a) Montrer que l'application S ainsi définie est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Quel est l'automorphisme réciproque de S?
   (b) Montrer que si M et N sont deux éléments quelconques de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, on a $S(MN) = S(M)S(N)$
2. On considère les éléments

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Montrer que (I, J, K, L) forme une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Montrer que I, J, K, L sont des vecteurs propres de S. Déterminer la matrice représentant l'automorphisme S dans la base (I, J, K, L).

4. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments M de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $S(M) = M$ et soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des éléments M de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$(R) Vérifiant $S(M) = -M$. Montrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et que tout élément M de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme $M = M_+ + M_-$ avec $M_+ \in \mathcal{F}$ et $M_- \in \mathcal{G}$.

   A titre d'exemple, déterminer les matrices A_+ et A_- lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

5. (a) Montrer que le produit de deux matrices appartenant à $\mathcal{F}$ appartient aussi à $\mathcal{F}$. Que peut-on dire du produit de deux éléments de $\mathcal{G}$?

   (b) Plus précisément, pour deux matrices M et N de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, exprimer $(MN)_+$ et $(MN)_-$ en fonction de M_+, M_-, N_+ et N_-.

EXERCICE II

Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, soit f_k la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_k(x) = \frac{\ln^k(x)}{x-1} \text{ si } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \text{ et } f_k(1) = 0$$

1. Etude des fonctions f_k.

   (a) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
   Justifier la dérivabilité de la fonction f_k sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et préciser la valeur de la dérivée $f'_k(x)$, pour tout x appartenant à $]0,1[\cup]1,+\infty[$.
   Montrer que f_k est dérivable en 1 et donner, selon les valeurs de k, la valeur de $f'_k(1)$

   (b) On considère les fonctions auxiliaires φ_k définies, pour tout $x > 0$, par

   $$\varphi_k(x) = k(x-1) - xln(x).$$

   Etudier, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, les variations de la fonction φ_k. Montrer que l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet une racine unique dans l'intervalle $]1, +\infty[$. Dans la suite, on notera a_k cette racine.

   (c) En distinguant les cas $k = 2$, k pair supérieur ou égal à 4, k impair supérieur ou égal à 3, donner le tableau de variation de la fonction f_k (on précisera les limites aux bornes).

2. Etude asymptotique de la suite $(a_k)_{k \geqslant 2}$.

   (a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $e^{k-1} \leqslant a_k \leqslant e^k$

   (b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on pose $a_k = e^k(1+\delta_k)$. Montrer que le réel δ_k vérifie l'équation

   $$-ke^{-k} = (1+\delta_k)\ln(1+\delta_k)$$

   Justifier l'inégalité : $|\ln(1+\delta_k)| \leqslant ke^{1-k}$. En déduire que la suite $(\delta_k)_{k \geqslant 2}$ a une limite nulle et, plus précisément, que δ_k est équivalent à $-ke^{-k}$ quand k tend vers l'infini.

   (c) Justifier, en conclusion, la relation

   $$a_k = e^k - k + o(k) \text{ quand } k \to +\infty$$

3. Calcul approché des nombres a_k.
   Ecrire un programme en Turbo-Pascal donnant une valeur approchée à moins de 10^{-4} près du nombre a_4.

EXERCICE III

Une chaîne de fabrication produit des objets dont certains peuvent être défectueux. Pour modéliser ce processus on considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, de paramètre p, $(0 < p < 1)$. La variable aléatoire X_n prend la valeur 1 si le $n^{ième}$ objet produit est défectueux et prend la valeur 0 s'il est de bonne qualité.
Pour contrôler la qualité des objets produits, on effectue des prélèvements aléatoires et on considère une suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, de paramètre p', $(0 < p' < 1)$, telle que Y_n prend la valeur 1 si le $n^{ième}$ objet produit est contrôlé et 0 s'il ne l'est pas.
Toutes les variables aléatoires X_n et Y_n sont définies sur un même espace probabilisé Ω, muni d'une probabilité notée p et sont supposées toutes indépendantes entre elles.
La probabilité conditionnelle d'un événement A sachant un événement B est notée $\mathbf{P}_B(A)$
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $Z_n = X_n Y_n$. La variable aléatoire Z_n ainsi définie vaut donc 1 si le $n^{ième}$ objet est à la fois défectueux et contrôlé et 0 sinon.
L'objet de l'exercice est d'étudier le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne avant qu'un objet défectueux n'ait été détecté.

1. Déterminer, pour tout entier $n \geqslant 1$, la loi de la variable aléatoire Z_n et la covariance des variables X_n et Z_n. En déduire que les variables X_n et Z_n ne sont pas indépendantes.

   Par contre, il résulte des hypothèses (et on ne demande pas de le justifier) que, pour tout entier n, la variable aléatoire Z_n est indépendante des variables $(X_i, i \neq n)$ et des variables $(Y_i, i \neq n)$, de même que des variables $(Z_i, i \neq n)$.

2. Soit, pour tout entier $n \geqslant 1$, A_n l'événement : "le $n^{ième}$ objet fabriqué est le premier qui ait été contrôlé et trouvé défectueux".

   (a) Exprimer A_n à l'aide des variables aléatoires $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ et déterminer $p(A_n)$.

   (b) Montrer qu'on finira, presque sûrement, par détecter un objet défectueux.

3. Soit un entier $n \geqslant 2$.

   (a) Pour tout entier k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n-1$, calculer la probabilité des événements $(X_k = 1) \cap A_n$ et $(X_k = 1) \cap (Z_k = 0)$.
   On note B_k l'événement $(Z_k = 0)$. Montrer l'égalité des probabilités conditionnelles

   $$\mathbf{P}_{A_n}(X_k = 1) = \mathbf{P}_{B_k}(X_k = 1) = \frac{p - pp'}{1 - pp'}$$

   (b) Montrer que si $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ est une suite quelconque de nombres égaux à 0 ou à 1, on a

   $$\mathbf{P}_{A_n}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}_{A_n}(X_i = x_i)$$

   (c) Soit $S_n = \sum_{j=1}^{n-1} X_j$ le nombre d'objets défectueux fabriqués avant le $n^{ième}$ objet et soit un entier m vérifiant $0 \leqslant m \leqslant n-1$. Calculer $\mathbf{P}_{A_n}(S_n = m)$

   (d) Déterminer l'espérance de S_n pour la probabilité conditionnelle sachant A_n.