CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1997

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE I

On note $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, u l'application identique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$dans lui même et I la matrice identité de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ représentant u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Etant donné un couple (a, b) de réels, déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $af + bu$ de $\mathbb{R}^3$. Pour quelles valeurs de (a, b) cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

3. Quelles relations le couple (a, b) doit-il vérifier pour que l'endomorphisme $af + bu$ soit inversible? Montrer que l'inverse de $af + bu$, quand il existe, est de la forme $\lambda f + \mu u$ où λ et μ sont des réels dont on donnera l'expression en fonction de a et b.

   On considère maintenant l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices T de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A c'est à dire qui vérifient $AT = TA$.

4. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$

5. Pour une matrice T de la forme $T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, calculer $AT - TA$. En déduire une base de $\mathcal{E}$ et sa dimension.

6. Soit Φ l'application de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ dans lui même qui fait correspondre à la matrice T la matrice $AT - TA$. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. Donner une base du noyau et une base de l'image de Φ

EXERCICE II

Dans tout l'exercice λ désignera un réel strictement positif et f_λ sera la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_\lambda = e^{-\lambda x^2}$, pour tout réel x.
Le but de l'exercice est l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. (a) Montrer que l'équation $f_\lambda(x) = x$, d'inconnue x, admet une seule racine dans $\mathbb{R}$ et que cette racine appartient à $]0,1[$. On note ℓ_λ cette racine.
   (b) Montrer que, si $\lambda > \dfrac{e}{2}$, alors $\ell_\lambda > \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$
2. On suppose dans cette question que $\lambda \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   (a) Montrer que $\max\limits_{x\in[0,1]} |f'_\lambda(x)| < 1$
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite ℓ_λ.

   On revient au cas général, c'est à dire $\lambda \in \mathbb{R}_+^\times$.
3. On pose $g_\lambda = f_\lambda \circ f_\lambda$.
   (a) Montrer que g_λ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
   (b) Montrer que les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et convergentes.
4. (a) Montrer que les racines éventuelles de l'équation $g_\lambda(x) = x$ appartiennent à $]0,1[$. Vérifier que ℓ_λ est une racine de cette dernière équation.
   (b) Soit $x \in]0,1[$. Montrer que $g_\lambda(x) = x$ si et seulement si $\ln(-\ln(x)) + 2\lambda x^2 - \ln(\lambda) = 0$
   (c) Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $h_\lambda(x) = \ln(-\ln(x)) + 2\lambda x^2 - \ln(\lambda)$
   Montrer que la fonction h_λ est dérivable sur $]0,1[$ et que $h'_\lambda(x)$ a le signe opposé de celui de $1+4\lambda x^2\ln(x)$
   (d) Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $k_\lambda(x) = 1 + 4\lambda x^2 \ln(x)$. Dresser le tableau de variation de la fonction k_λ.
   (e) On se place désormais dans le cas où $\lambda > \dfrac{e}{2}$
   - Montrer que, dans ce cas, $k_\lambda(\ell_\lambda) < 0$
   - Dresser le tableau de variation de la fonction h_λ et en déduire que l'équation $h_\lambda(x) = x$ admet trois racines μ_λ, ℓ_λ, ν_λ vérifiant $0 < \mu_\lambda < \ell_\lambda < \nu_\lambda < 1$
   - Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers μ_λ et ν_λ respectivement.

EXERCICE III

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Soit a et b deux réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.
On effectue une suite d'expériences aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées A et B. On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que, lors d'une expérience, la probabilité que la pièce A donne pile est a, et que la probabilité que la pièce B donne pile est b.

1. (a) Pour tout entier naturel n, calculer la probabilité μ_n, que la pièce A donne n fois pile et, à la $(n+1)^{ième}$ expérience, face pour la première fois. Calculer de même la probabilité ν_n que la pièce B donne n piles et, à la $(n+i)^{ième}$ expérience, face pour la première fois.
   (b) Montrer que les suites $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définissent des lois de probabilité sur $\mathbb{N}$. Ces lois seront notées dorénavant respectivement μ et ν.

2. On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et dont les lois de probabilité sont respectivement μ et ν. (La variable aléatoire X représente le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce A donne face pour la première fois et la variable aléatoire Y représente le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce B donne face pour la première fois).

   (a) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

   (b) Trouver, pour tout entier naturel k, la valeur de $P(X > k)$.

   (c) On s'intéresse au nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que l'une au moins des pièces donne face pour la première fois. Pour cela on note M la variable aléatoire définie par $M = \min(X, Y)$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la probabilité $\mathbf{P}(M \geqslant k)$. En déduire la loi de probabilité de M.

   (d) Déterminer la probabilité que la pièce B ne donne pas face avant la pièce A, c'est-à-dire $\mathbf{P}(Y \geq X)$.

3. On note $U = X + Y$.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de U. (On distinguera les cas $a = b$ et $a \neq b$).

   (b) Calculer, pour tout couple (j, k) d'entiers naturels,
   les probabilités conditionnelles $\mathbf{P}(Y = k / U = j)$

4. On suppose désormais que $a = b$. On note $V = Y - X$.

   (a) Calculer, pour tout entier naturel k et tout entier relatif r, la probabilité de l'événement $(M = k$ et $V = r)$.
   (On distinguera le cas $r \geqslant 0$ et le cas $r < 0$).

   (b) Trouver la loi de probabilité de V. Les variables aléatoires M et V sont-elles indépendantes ?