CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1994

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, on désigne par W la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$W(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x t \, dt$$

L'objectif est d'étudier cette fonction W et d'en déduire quelques applications.

Partie I : Étude d'une intégrale impropre

On désigne par f la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par la relation :

$$f(x) = -\int_x^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) \, dt$$

1. Montrer que, pour tout nombre réel t appartenant à $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\sin t \geqslant \frac{2t}{\pi}$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer les primitives de la fonction :

$$t \to \ln \frac{2t}{\pi}$$

En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale :

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{2t}{\pi}\, dt$$

3. Établir que la fonction f est monotone et bornée sur $]0, \frac{\pi}{2}]$; en déduire la convergence de l'intégrale suivante :

$$L = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt$$

4. On se propose enfin de calculer L à l'aide des deux intégrales suivantes, dont la convergence résultera de la question a) ci-dessous :

$$J = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t)\, dt \qquad K = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\, dt$$

   (a) Obtenir des relations entre les intégrales J, K et L en effectuant dans cette dernière les changements de variables $u = \pi - t$ et $u = \pi/2 - t$.

   (b) Exprimer $K + L$ en fonction de $L + J$ (on rappelle que $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$).

   (c) En déduire les valeurs des intégrales J, K et L.

Partie II : Étude de la fonction W

1. Soient x et y des nombres réels positifs tels que $x \leqslant y$. Comparer $W(x)$ et $W(y)$ et en déduire le sens de variation de la fonction W sur $[0, +\infty[$.

2. On considère des nombres réels positifs x et x_0.

   (a) Montrer que, pour tout nombre réel positif a :

$$\left|e^{-ax} - e^{-ax_0}\right| \leqslant a\,|x - x_0|$$

   (b) En déduire l'inégalité suivante :

$$|W(x) - W(x_0)| \leqslant \frac{\pi \ln 2}{2}\, |x - x_0|$$

   (c) Établir la continuité de la fonction W sur $[0, +\infty[$

3. Pour tout nombre réel positif x, exprimer $W(x + 2)$ en fonction de $W(x)$ à l'aide d'une intégration par parties (on écrira à cet effet : $\sin^{x+2} t = \sin t \sin^{x+1} t$).

4. On se propose d'étudier le comportement asymptotique de W à l'aide de la fonction auxiliaire g définie pour $x \geqslant 0$ par :

$$g(x) = (x + 1)W(x + 1)W(x)$$

(a) Établir que, pour tout nombre réel positif ou nul x, $g(x+1) = g(x)$.
En déduire la valeur de $g(n)$ pour tout entier naturel n.

(b) Montrer que, pour tout nombre réel x de $[0,1]$ et tout entier naturel n :

$$\frac{g(n+1)}{n+2} \leqslant \frac{g(x+n)}{x+n+1} \leqslant \frac{g(n)}{n+1}$$

En déduire en fonction de n un encadrement de $g(x)$. En conclure que g est constante sur $[0,+\infty[$ (on explicitera son unique valeur).

(c) En remarquant que $W(x+2) \leqslant W(x+1) \leqslant W(x)$, montrer que $W(x+1)$ est équivalent à $W(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(d) Déduire de ces résultats que, lorsque x tend vers $+\infty$:

$$W(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

Partie III : Applications

A. **Calcul de l'intégrale de Gauss** :

$$G = \int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\,dt$$

1) Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x et tout nombre réel $u > -x$:

$$\left(1+\frac{u}{x}\right)^x \leqslant \exp u$$

On pourra étudier pour $u > -x$ le signe de la fonction $u \to u - x\ln(1+\frac{u}{x})$.

2) En intégrant l'inégalité précédente avec des valeurs convenables de u, établir que, pour $x \geqslant 1$:

$$\int_0^{\sqrt{x}} \left(1-\frac{t^2}{x}\right)^x dt \leqslant \int_0^{\sqrt{x}} \exp(-t^2)\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{x}\right)^{-x} dt$$

3) En posant respectivement $t = \sqrt{x}\cos u$ et $t = \sqrt{x}\dfrac{\cos u}{\sin u}$ dans la première et la dernière de ces intégrales, établir que, pour $x \geqslant 1$:

$$\sqrt{x}W(2x+1) \leqslant \int_0^{\sqrt{x}} \exp(-t^2)\,dt \leqslant \sqrt{x}W(2x-2)$$

4) À l'aide de l'équivalent de W obtenu dans la deuxième partie, en déduire la convergence et la valeur de l'intégrale G, et retrouver la valeur de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\frac{-t^2}{2}\,dt$$

B. **Calcul de valeurs approchées du nombre π**

1) On pose pour tout réel positif x :

$$h(x) = \frac{W(x+1)}{W(x)}$$

a. En remarquant que $W(x+2) \leqslant W(x+1) \leqslant W(x)$ et en utilisant la relation établie à la question (2.3), établir que :

$$0 \leqslant 1 - h(x) \leqslant \frac{1}{x+2}$$

b. Exprimer $h(x)$ en fonction de $h(x-2)$ pour $x \geqslant 2$, et en déduire que, pour tout nombre entier naturel n :

$$h(2n) = \frac{r_n}{\pi} \qquad \text{avec} \qquad r_n = 2\prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}$$

En déduire la limite de r_n quand n tende vers $+\infty$ et un encadrement de $\pi - r_n$.

c. Écrire en PASCAL un algorithme permettant le calcul de r_n.
Donner des valeurs approchées de r_n (avec 4 décimales) pour $n = 25$ et $n = 75$.

2) On se propose d'accélérer la convergence de la suite (r_n).

a. On pose pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$u_k = \ln r_k - \ln r_{k-1}$$

En calculant $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m}$ et en faisant tendre m vers $+\infty$, établir que :

$$\ln \frac{\pi}{r_n} = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$$

b. En comparant une série à une intégrale, établir l'inégalité :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n}$$

c. Étudier les variations sur $]0,1[$ de la fonction ε définie par :

$$\forall x \in]0,1[, \quad \varepsilon(x) = -\frac{\ln(1-x)+x}{x}$$

En déduire que, pour tout entier $k \geqslant n$:

$$\frac{1}{4k^2} \leqslant -\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \leqslant (1+\varepsilon_n)\frac{1}{4k^2} \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon_n = \varepsilon\left(\frac{1}{4n^2}\right)$$

d. Déduire des résultats précédents un équivalent de $\ln \dfrac{\pi}{r_n}$ et prouver que :

$$\pi - r_n \sim \frac{r_n}{4n}$$

Déduire enfin des valeurs approchées de r_n obtenues précédemment des valeurs approchées de :

$$\left(1 + \frac{1}{4n}\right) r_n$$

(avec 4 décimales) pour $n = 25$ et $n = 75$.